

ANÁLISE DO ESTADO DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO EM PROBLEMAS BIDIMENSIONAL COM COORDENADAS POLARES EM TUBOS CONCÊNTRICOS PERFEITAMENTE ENCAIXADOS

ANALYSIS OF STRAIN AND STRESS IN TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS WITH POLAR COORDINATES IN BIMETALLIC CONCENTRIC PIPE.

Patrícia Cândida Souza da Silva;
Marcos Honorato de Oliveira,
Gilberto Gomes,
Fernando Rodrigo de Aquino

Resumo

A demanda pelo uso de menos materiais, que sejam mais eficazes na relação de redistribuição de esforços e resistência com suas propriedades mecânicas, tem conduzido ao desenvolvimento de combinações cada vez maiores de diferentes materiais, pois quanto menos material gasto, menor será o custo. Estes conjuntos de combinações de fato podem ser projetados de modo que a pressão interna produza uma tensão aproximadamente uniforme no material. Portanto, este trabalho apresenta o estudo de um tubo composto por dois cilindros perfeitamente encaixados e compostos de diferentes materiais que foi analisado analiticamente com o auxílio do software MAPLESOFT v.18 e numericamente com o software MIDAS FEA v.2.9.6, que se baseia nos elementos finitos para resolução dos problemas. Para a análise das tensões, deformações e deslocamentos, foi considerada uma pressão interna e observou-se a redistribuição dos esforços ao longo da variação do raio e do ângulo. Como objetivo, este estudo propôs a análise analítica pela consideração do estado plano de tensões aplicando a teoria da elasticidade para campos de pequenas deformações em problemas bidimensionais, e o numérico pelo estado plano de deformações. Ao final foi feita uma comparação destes resultados, demonstrando certa diferenciação nos resultados para as deformações e deslocamentos apresentados.

Palavra-Chave: Tensão radial e tangencial, deslocamento radial, deformação radial e tangencial, coordenadas polares, software MIDAS FEA v.2.9.6, software MAPLESOFT v.18.

Abstract

The demand for the use of less material, which is more effective in the relation of redistribution of efforts and resistance with their mechanical properties, provides the development of ever larger combinations of different materials; because less material expended more lower it is the cost. These sets of combinations can in fact be designed so that the internal pressure produces approximately uniform tension in the material. Therefore, this work presents the study of a tube composed of two perfectly inserted cylinders and composed of different materials that was analyzed analytically with MAPLESOFT v.18 software and numerically with the software MIDAS FEA v.2.9.6, which is based on finite elements for solving problems. For the analysis of tensions, deformations and displacements, was considered an internal pressure and was observed a redistribution of the efforts along the variations of the radius and angle. The study's objective proposed an analytical analysis by considering the plane state stress state applying the elasticity theory for small deformation fields in two-dimensional

problems, and the numerical by the state plane strain. In the end, the results were compared, showing a considerable differentiation in the results for the deformations and displacements presented.

Keywords: Radial and tangential stress, radial displacement, radial and tangential deformation, polar coordinate, software MIDAS FEA v.2.9.6, software MAPLESOFT v.18.

1. Introdução

A realidade dos problemas presentes na engenharia cotidiana apresenta diversificados métodos para encontrar soluções adequadas, sejam por meio de métodos analíticos ou numéricos. Existem muitos softwares no mercado que auxiliam nas resoluções de problemas, os quais associados com o estudo da elasticidade dos materiais permite abranger o conhecimento sobre resoluções de problemas, partindo de equações básicas de equilíbrio, compatibilidade e condições contorno, até encontrar equações propriamente satisfeitas para um problema em análise.

O conhecimento em outras fontes de soluções fornece uma base de comparação para a escolha de um método mais eficaz diante de certos problemas mais complexos. O Método dos Elementos Finitos é um grande aliado quando se trata de problemas que não possuem soluções exatas. O software MIDAS FEA v.2.9.6 utiliza desse método para resolver e analisar um problema por meio da discretização da estrutura, permitindo identificar pontos de concentração de tensão na peça, fornecendo melhores dados para análises mais relevantes.

Este trabalho analisará, de forma analítica e numérica, um tubo, com dois cilindros perfeitamente encaixados e com diferentes materiais, sujeito a uma pressão interna. As equações serão abstraídas do estudo da teoria da elasticidade dos materiais utilizando as coordenadas polares como referência, por meio do estado plano de tensões, e resolvidas analiticamente com o auxílio do software MAPLESOFT v.18, e pelo estado plano de deformações, solucionadas numericamente com o software MIDAS FEA v.2.9.6.

2. Revisão Bibliográfica

2.1. Estado plano de deformações

Considerando um elemento o qual sua dimensão na direção z é muito grande em relação às demais, e o mesmo é solicitado por forças perpendiculares que não sofrem variação no sentido do comprimento (z), infere-se que todas as seções transversais estão com situações análogas. Esse tipo de caso é bastante observado em problemas de engenharia como, por exemplo, em tubos cilíndricos com pressão interna.

2.1.1. Relações Deslocamentos-Deformação

Sejam as componentes de deslocamento desse corpo u , v e w , paralelas aos eixos coordenados x , y e z , respectivamente, com o deslocamento longitudinal w sendo nulo, o alongamento unitário (ϵ) em z e as deformações angulares (γ) em xz e yz são nulos. Destas observações, obtemos:

$$u(x, y, z) = u(x, y) \quad (\text{Equação 1})$$

$$v(x, y, z) = v(x, y) \quad (\text{Equação 2})$$

$$w(x, y, z) = 0 \quad (\text{Equação 3})$$

Quando um corpo apresenta a definição das Equações 1, 2 e 3 é dito que ele se encontra no estado plano de deformações.

O tensor das deformações será representado por:

$$d = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 4})$$

Onde:

$$d_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad d_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad d_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$d_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad d_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad d_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

$$d_{12} = d_{21} \quad d_{13} = d_{31} \quad d_{23} = d_{32}$$

Os elementos do tensor das deformações apresentam as expressões das componentes de deformações apresentadas a seguir, de acordo com:

$$\varepsilon_x = d_{11} \quad \varepsilon_y = d_{22} \quad \varepsilon_z = d_{33}$$

$$\gamma_{xy} = 2 \times d_{12} \quad \gamma_{yz} = 2 \times d_{13} \quad \gamma_{xz} = 2 \times d_{23}$$

Portanto, as componentes de deformação são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{Equação 5})$$

Observa-se que no caso plano obtêm-se três deformações, duas normais (caracterizadas pelo alongamento unitário em x e y), e uma por cisalhamento (deformação angular em xy). Essas deformações são observadas na figura 1.

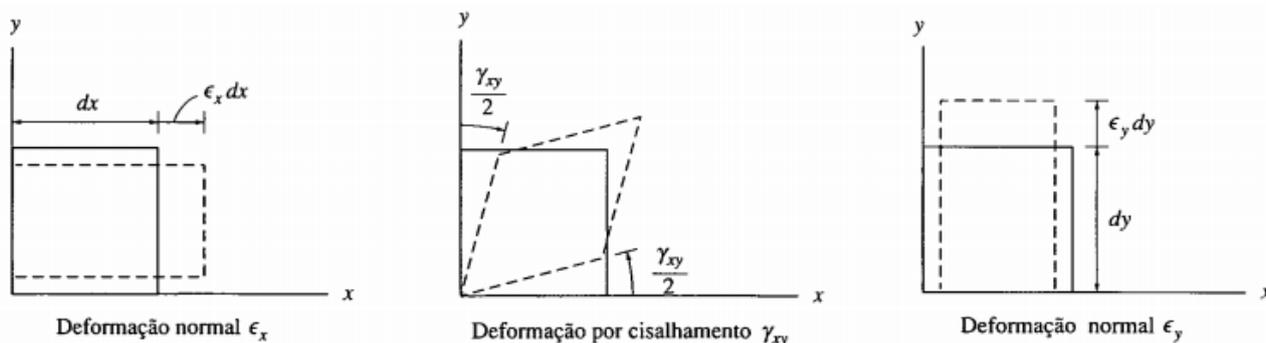


Figura 1 – Componente de deformações (HIBBELER, 2004).

2.1.2. Equações de Equilíbrio

Pela Lei de Hooke Generalizada é possível determinar as componentes de deformação em relação às tensões, considerando o coeficiente de Poisson.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \qquad \epsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_y \qquad \text{(Equação 6)}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \qquad \epsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_y - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_x \qquad \text{(Equação 7)}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \text{(Equação 8)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \text{(Equação 9)}$$

Tem-se como definição do equilíbrio:

$$\nabla^t \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \text{(Equação 10)}$$

Aplicando ao estado plano de deformação:

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x \right) = 0 \qquad \text{(Equação 11)}$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y \right) = 0 \qquad \text{(Equação 12)}$$

A equação 13 refere-se à compatibilidade de deformações. Ressalta-se que os campos lineares de tensão sempre irão satisfazer a compatibilidade de deformações.

$$\left(\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \text{(Equação 13)}$$

Aplicando as equações 6, 7, 8 e 9 na equação de compatibilidade, chegam-se na
 Revista Tecnologias em Projeção. V.11.n.1, Ano 2020, p4

equação 14, referente as três componente de tensão.

$$(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{Equação 14})$$

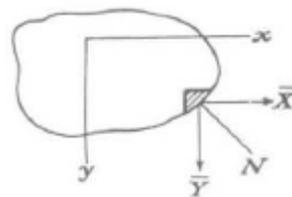
2.1.3. Condições de Contorno

As condições de contorno são necessárias para manter o equilíbrio entre as componentes de tensão com as forças externas atuantes. As condições de contorno são do tipo:

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \quad (\text{Equação 15})$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy} \quad (\text{Equação 16})$$

Onde l e m são os cossenos diretores da normal N ao contorno, como apresentado na figura 2.



Figuras 2 – Componentes das forças de superfície (TIMOSHENKO, 1980).

2.1.4. Técnicas dos Deslocamentos (domínios infinito e semi-infinito)

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método numérico que analisa modelos com domínio infinito ou semi-infinito, pela facilidade de discretização do modelo, a qual ocorre somente no contorno do elemento gerando um número de elementos menor quando comparado ao Método dos Elementos Finitos, acelerando a solução do problema.

As simulações pelo MEC terão como base as equações primordiais do problema. A partir destas, é necessário discretizar a peça que passará de ser contínua para um aglomerado de número finito de elementos de contorno, devendo ter propriedades bem definidas, quando isso ocorre às soluções deixam de ser exatas e passam a serem aproximações.

2.1.5. Técnicas das Tensões (domínio finito)

Problemas de elasticidade no plano podem ser resolvidos por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF). Este método parte das variáveis e equações que representam o comportamento da estrutura, para que possa ser feita uma modelação da peça tendo como base as condições de equilíbrio e de compatibilidade, no domínio e na fronteira da peça, e as relações de elasticidade. Presume-se que o material é elástico linear e que os deslocamentos e as deformações são infinitesimais, linearidade física e geométrica, respectivamente.

Grande parte dos problemas de elasticidade não possuem soluções analíticas, com isso o MEF tenta aproximar o campo de deslocamentos para obter uma solução aproximada ao problema, o qual será formulado e analisado por critérios de aproximação, a partir da

generalização do caso plano, chegando a uma aproximação do campo de deformações.

Os elementos de deslocamento utilizado pelo MEF permitiram a generalização da geometria da peça e das suas equações, proporcionando resolver computacionalmente esses problemas de elasticidade de forma eficiente, de acordo com a aproximação do campo de deslocamentos.

2.2. Estado plano de tensões

No estudo da teoria da elasticidade, assume-se que os corpos não são totalmente rígidos, sendo considerados como corpos deformáveis continuamente. Matematicamente esses corpos são descritos por funções e um dos grandes conceitos no estudo da mecânica do contínuo é o conceito de campo tensorial, onde definimos que cada ponto do corpo, pode ser associado a um tensor ou a uma matriz que contém suas devidas componentes de tensão num espaço que pode ser bidimensional ou tridimensional. Caso o problema seja tratado como uma análise bidimensional, consideram-se dois espaços, então seriam duas componentes cisalhantes ao plano e duas normais, conforme equação 17. Já para uma análise tridimensional, o campo tensorial iria conter nove componentes, sendo seis componentes cisalhantes e três normais, como pode ser observado na equação 18.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \tau_{ij} \\ \tau_{ji} & \sigma_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 17})$$

$$\sigma_{ijk} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \tau_{ij} & \tau_{ik} \\ \tau_{ji} & \sigma_{jj} & \tau_{jk} \\ \tau_{ki} & \tau_{kj} & \sigma_{kk} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 18})$$

As componentes cisalhantes num espaço bidimensional são identificadas na matriz como sendo aquela cujo “i” é diferente de “j”, ou seja, o ponto analisado possuindo uma componente transversal em cada espaço. Já a tensão normal a uma face seria aquela quando “i” é igual a “j”, que seria aquela tensão perpendicular ao plano do corpo analisado, como pode ser visto na figura abaixo. Usualmente utiliza-se uma tensão normal com sinal positivo quando aquele sólido está sofrendo uma tensão de tração e o sinal negativo quando ele está sofrendo uma compressão. Segundo Timoshenko e Goodier (1980), quando for admitida uma aproximação em que as componentes são independentes de um terceiro espaço vetorial, como, por exemplo, uma problemática em que a espessura não seja uma variável que afete o sistema, então, as componentes da função podem ser consideradas como sendo apenas em dois espaços.

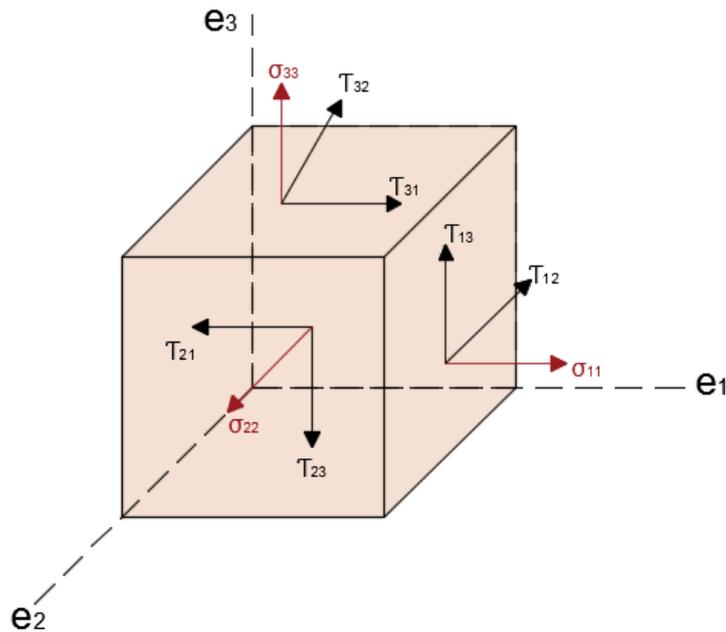


Figura 3 – Componente de tensão de um sólido tridimensional (CODA, 2013 - Adaptado).

2.2.1. Lei de Hooke

Em 1660, Robert Hooke observou uma relação de linearidade entre a tensão (σ) e a deformação longitudinal (ϵ) para materiais em regime elástico-linear. Considerando um campo pequeno de deformações, ele percebeu que a relação entre as variáveis poderia ser considerada como sendo uma relação elástico linear envolvendo uma constante de proporcionalidade que relacionasse a tensão com a deformação. Essa constante ficou conhecida como módulo de Young ou módulo de elasticidade (E), que depende do tipo de material do objeto em questão. Caso a tensão normal seja de tração, o módulo de Young será positivo e estará associado a um alongamento do elemento. Sua relação com as variáveis foi chamada de Lei de Hooke e pode ser observados na equação 19.

$$\sigma_{ij} = E_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \quad (\text{Equação 19})$$

De acordo com Olivella e Bosch (2000), quando o material possui as mesmas propriedades em todas as direções, chamamos de um material isotrópico e suas propriedades são tratadas como elásticas onde o módulo de elasticidade é formulado por um tensor de constantes elásticas (C), visto na equação 20. Essas constantes elásticas dentro da matriz dependem de constantes obtidas experimentalmente, chamadas de constantes de Lamé (μ e λ) dadas pela equação 21 e 22, que caracterizam o comportamento elástico do material. Elas dependem do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson que é uma constante de proporcionalidade entre a extensão transversal e longitudinal.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \epsilon_{ll} + 2 \cdot \mu \cdot \epsilon_{ij} \quad (\text{Equação 20})$$

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (\text{Equação 21})$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad (\text{Equação 22})$$

Fazendo a relação inversa da lei de Hooke dada pela equação 20, aplicando as equações 21 e 22 e expandindo a matriz, temos a relação dada pela equação abaixo, onde a equação 21 é conhecida como módulo de deformação transversal, que é identificada também em muitos casos como “**G**”.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{ii} \\ \varepsilon_{jj} \\ \varepsilon_{kk} \\ \gamma_{ij} \\ \gamma_{ik} \\ \gamma_{jk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{ii} \\ \sigma_{jj} \\ \sigma_{kk} \\ \tau_{ij} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{jk} \end{Bmatrix} \quad (\text{Equação 23})$$

Por fim, desenvolvendo a multiplicação tensorial dada pela equação 23, temos as seguintes relações abaixo para deformação normal axial e distorção.

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})] \quad (\text{Equação 24})$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{ij} \quad (\text{Equação 25})$$

2.2.2. Relações Deslocamentos-Deformação

A deformação normal axial de um elemento ao longo de um eixo, pode ser considerado como sendo a variação de seu comprimento devido a algum esforço sob forma de tensão ou força. Matematicamente podemos observar na equação 26 essa relação entre deformação e deslocamento sendo a variação entre os comprimentos final e inicial.

$$\varepsilon_{ii} = \frac{L_F - L_0}{L_0} = \frac{du_i}{de_i} \quad (\text{Equação 26})$$

Onde:

- L_F = Comprimento final do segmento;
- L_0 = Comprimento inicial do segmento;
- du = Variação de deslocamento axial na direção e_i .

Para um caso plano, existiriam três deformações, sendo duas axiais (ε_{11} e ε_{22}) e uma distorção (γ_{12}) entre os espaços. A distorção é dada pela variação dos deslocamentos nas duas dimensões, dado pela equação 27. Sabendo-se o comprimento final e inicial de um

sólido deformável, é possível saber o quanto aquele elemento se deformou.

$$\gamma_{ij} = \frac{du_i}{de_i} + \frac{du_j}{de_j} \quad (\text{Equação 27})$$

Analogamente, em coordenadas polares as deformações radiais e tangenciais em duas dimensões seriam dadas pelas equações abaixo.

$$\epsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad (\text{Equação 28})$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{d\theta} + \frac{u_r}{r} \quad (\text{Equação 29})$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_\theta}{dr} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (\text{Equação 30})$$

2.2.3. Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio são obtidas a partir do princípio do somatório de todas as forças agindo num corpo deve ser de tal que elas se anulem e mantenham o corpo em equilíbrio. A partir das tensões conhecidas num ponto qualquer no plano é possível determinar as tensões vizinhas a esse ponto. Além das tensões atuantes na superfície existem as forças de volume, que são aquelas que exercem ação sobre todos os elementos de volume como, por exemplo, as forças gravitacionais e forças de inércia.

Assumindo a coordenada polar para resolução do problema bidimensional em tubos, as coordenadas então não dependeram de uma distância “x” e “y”, mas sim de um raio (r) e um ângulo (θ), como podemos ver na figura abaixo do qual o raio interno é representado por “ri” e o externo por “re”.

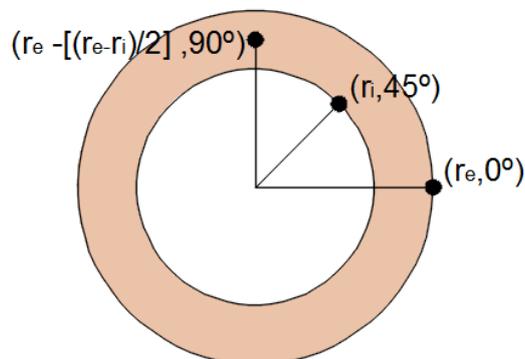


Figura 4 – Exemplo de posições em coordenadas polares

Portanto, as tensões que usualmente vemos descritas como tensões normais, tangenciais e cisalhantes num eixo x ou y, são chamadas em coordenadas polares como

tensões radiais (σ_r), tangenciais (σ_θ) e cisalhantes ($\tau_{r\theta}$). Se distribuirmos quatro pontos nas faces circulares de um trecho de um tubo conforme figura 5, podemos observar as distribuição dessas tensões e ver as forças de volume agindo sob o corpo como sendo uma força tangencial (F_θ) e uma radial (F_r). Sabendo-se a tensão em um ponto e as variações radiais e angulares, é possível saber as tensões nos demais pontos.

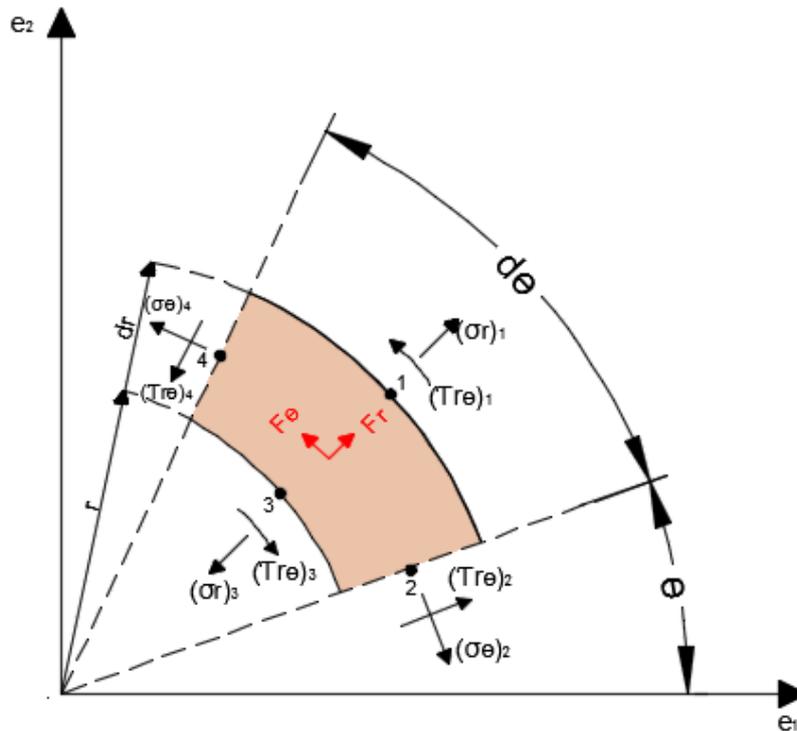


Figura 5 – Distribuição de tensões e forças de volume num corpo circular.

Considerando que a tensão é uma força agindo sobre uma área, e que a área de uma borda circular é o raio multiplicado pela variação do ângulo ($d\theta$), podemos descobrir as forças de superfície do corpo e fazer a relação de equilíbrio com as forças de volume radial e tangencial, conforme equações abaixo.

$$\sum F_{radial} = \sigma_{r1} \cdot (r + dr) \cdot d\theta - \sigma_{\theta 2} \cdot dr \cdot \left(\text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \right) - \sigma_{r3} \cdot r \cdot d\theta - \sigma_{\theta 4} \cdot dr \cdot \left(\text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \right) + (\tau_{r\theta 2} - \tau_{r\theta 4}) dr + F_r d\theta dr = 0 \quad (\text{Equação 31})$$

$$\sum F_{tangencial} = \tau_{r\theta 1} \cdot r \cdot d\theta - \tau_{r\theta 2} \cdot dr \cdot \text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \tau_{r\theta 3} \cdot r \cdot d\theta - \tau_{r\theta 4} \cdot dr \cdot \text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \sigma_{\theta 2} \cdot dr \cdot \left(\text{cos}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \right) - \sigma_{\theta 4} \cdot dr \cdot \left(\text{cos}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \right) + F_\theta d\theta dr \quad (\text{Equação 32})$$

Trabalhando no campo das pequenas deformações em que a variação do ângulo é muito pequena, podemos aplicar a definição de radianos para ângulos muito pequenos, onde os senos são considerados iguais a zero e os cossenos igual a um, e simplificando pela divisão de $d\theta$ e dr , transformamos a equação 31 na equação 33.

$$\sum F_{radial} = \frac{(\sigma_{r1} - \sigma_{r3}) \cdot r}{dr} - \frac{(\sigma_{\theta2} + \sigma_{\theta4})}{2} + \frac{(\tau_{r\theta2} - \tau_{r\theta4})}{d\theta} + F_r = 0 \quad (\text{Equação 33})$$

$$\sum F_{tangencial} = \frac{(\tau_{r\theta1} - \tau_{r\theta3}) \cdot r}{dr} + \frac{(\tau_{r\theta2} - \tau_{r\theta4})}{2} + \frac{(\sigma_{\theta2} - \sigma_{\theta4})}{d\theta} + F_\theta = 0 \quad (\text{Equação 34})$$

De acordo com Timoshenko e Goodier (1980), se as dimensões dos elementos são consideradas cada vez menores, tendendo a um limite igual a zero, podemos reescrever a equação 32 conforme equação abaixo. A equação de equilíbrio na direção tangencial é obtida da mesma maneira.

$$\sum F_{radial} = \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{r\theta})}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (\text{Equação 35})$$

$$\sum F_{tangencial} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{2 \cdot \tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (\text{Equação 36})$$

2.2.4. Formulação em Deslocamentos

Os deslocamentos em coordenadas polares são chamados de deslocamentos radiais e tangenciais e sabendo-se o deslocamento em um ponto é possível descobrir os demais. Supondo que de acordo com a figura abaixo se saiba o deslocamento radial (u) e tangencial (v) no ponto b dado pela coordenada (r, θ) , é possível descobrir o deslocamento dos pontos a ($r, \theta + d\theta$) e c ($r + dr, \theta$) pela relação dada nas equações 37 e 38. Notasse que a variação no ponto a se dá pela variação do ângulo e a variação no ponto c se dá pela variação do raio.

$$(u, v)_a = \left(u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta, v + \frac{\partial v}{\partial r} dr \right) \quad (\text{Equação 37})$$

$$(u, v)_c = \left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr, v + \frac{\partial v}{\partial r} dr \right) \quad (\text{Equação 38})$$

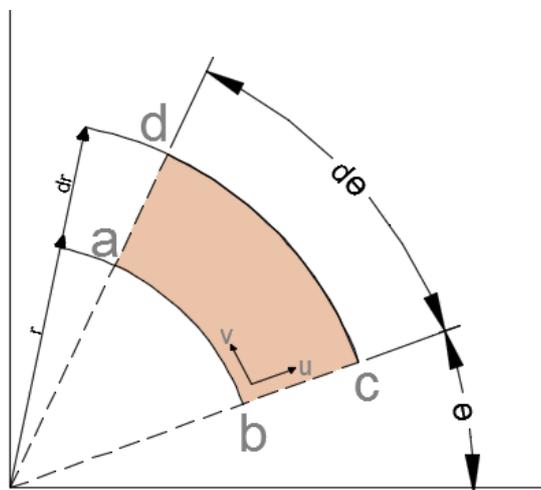


Figura 6 – Distribuição de pontos numa sessão circular.

Sabendo-se a relação de deformação com deslocamento dada pela equação 29. Os deslocamentos em coordenadas polares gerarão uma deformação radial e tangencial. Dada pela relação vista nas equações abaixo. Onde para a deformação tangencial (equação 40) se tem duas variações a serem consideradas devido à variação de comprimento provocada por v e devido ao comprimento final do segmento alterado pelo deslocamento radial (u).

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (\text{Equação 39})$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_\theta^u + \epsilon_\theta^v = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (\text{Equação 40})$$

2.2.5. Formulação em Tensões

Assim como os deslocamentos em coordenadas polares, as tensões são chamadas de tensões radiais e tangenciais, no entanto partimos do equilíbrio em coordenadas cartesianas como mostra a figura abaixo, para obter a formulação de tensões em coordenadas polares

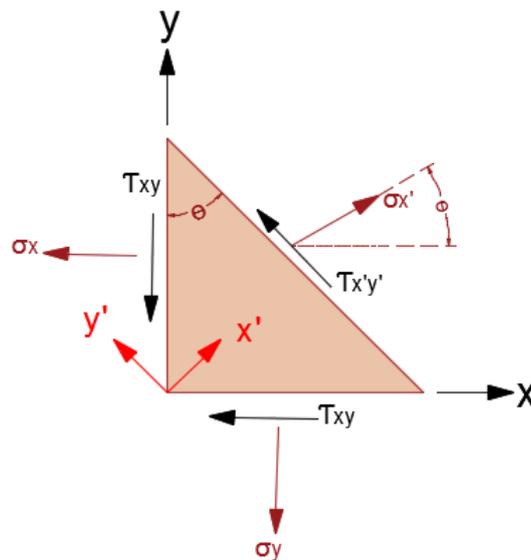


Figura 7 – Representação 2D de distribuição de tensões em uma chapa de espessura fina

O equilíbrio em coordenadas cartesianas fica:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{Equação 41})$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{Equação 42})$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (\text{Equação 43})$$

Para se chegar à formulação desejada, é preciso utilizar as relações entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares:

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{Equação 44})$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{Equação 45})$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad e \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad (\text{Equação 46})$$

Que conduzem a:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad e \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad (\text{Equação 47})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} \rightarrow -\frac{\sin \theta}{r} \quad e \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} \rightarrow \frac{\cos \theta}{r} \quad (\text{Equação 48})$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad e \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \quad (\text{Equação 49})$$

Desta maneira, podemos relacionar as funções dependentes de x e y com as dependentes de r e θ :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{Equação 50})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{Equação 51})$$

Das equações 45 e 46 temos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{Equação 52})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left[\cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \quad (\text{Equação 53})$$

Operando a equação 53 vêm:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sigma_y = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin 2\theta \frac{\partial w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{Equação 54})$$

Observando que:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \quad (\text{Equação 55})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

Operando de maneira similar com relação à y vêm:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{Equação 56})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sigma_x \quad (\text{Equação 57})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin^2 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial w}{\partial r} \\ &+ \frac{1}{r} \sin 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Analogamente, utilizando-se as equações 52 e 56, obtemos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cos 2\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{2r^2} \sin 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2r} \sin 2\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \quad (\text{Equação 58})$$

Substituindo as equações 54, 57 e 58 nas equações 41, 42 e 43 e aplicando algumas propriedades trigonométricas, chegamos a:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (\text{Equação 59})$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (\text{Equação 60})$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \quad (\text{Equação 61})$$

2.2.6. Relação Tensão-Deformação (Equações Constitutivas)

Sabendo-se que a deformação relaciona-se com a tensão através da lei de Hooke, temos as seguintes relações abaixo para determinar a deformação partindo do estado plano de tensões onde teremos as tensões radiais e tangencias.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \alpha\Delta T \quad (\text{Equação 62})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\nu \frac{\sigma_{rr}}{E} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \alpha\Delta T \quad (\text{Equação 63})$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{2G} \quad (\text{Equação 64})$$

2.3. Técnicas de Solução Analítica

2.3.1. Função de Tensão de Airy (Polinômios)

O objetivo da função de tensão de Airy é satisfazer as equações de equilíbrio, bem como as equações de coMPatibilidade, por isso, ele mostrou que na ausência de forças de volume, a função de tensões deve satisfazer a equação de Laplace:

$$\nabla^4 w = 0 \rightarrow \nabla^2(\nabla^2 w) = 0 \quad (\text{Equação 65})$$

Sabendo que para uma representação 2D:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w \rightarrow \sigma_y + \sigma_x = \nabla^2 w \quad (\text{Equação 66})$$

Assim, a equação 65 em coordenadas cartesianas fica:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{Equação 67})$$

Aplicando a invariância das tensões normais:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta \quad (\text{Equação 68})$$

Substituindo as equações 59, 60 e 66 na equação 68, ficamos com a seguinte relação:

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (\text{Equação 69})$$

Fazendo a substituição da equação 69 na equação 65, chegamos a:

$$\nabla^2(\nabla^2 w) = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (\text{Equação 70})$$

A solução desta equação quando há a presença de carregamentos não simétricos é complicada e por vezes até impossível, no entanto, se o carregamento for simétrico, a função acima conhecida como função de Airy em coordenadas polares passa a depender apenas do raio, o que nos leva a:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{Equação 71})$$

Por sua vez, a função de airy tem como solução:

$$\omega(r) = A \log r + C r^2 \log r + B r^2 + D \quad (\text{Equação 72})$$

3. Formulação do problema em estudo

O problema proposto para estudo se refere a dois tubos cilíndricos vazados submetidos a uma pressão interna uniforme na superfície interna do primeiro tubo, como pode ser visto na figura 5. Os tubos são de diferentes materiais, portanto sofrerão variações nas suas características não só pela variação da espessura como comumente é tratado um problema como este, mas também pela compatibilização dos esforços na fibra comum de transmissão de carga, que gerará conseqüentemente uma variação de tensão e deformação diferente.

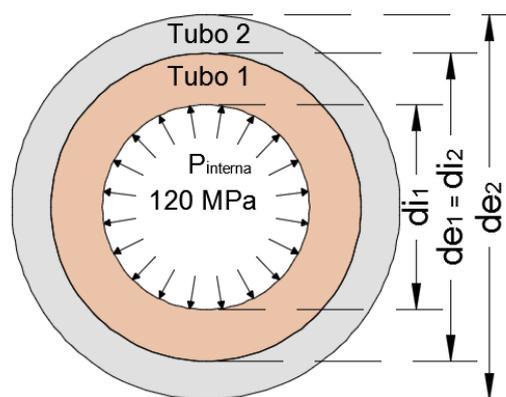


Figura 8 – Sessão transversal do problema em estudo

As propriedades consideradas para os tubos são dadas pela tabela logo abaixo. Onde se observa que foi adotado para o tubo 1 o aço A36 e para o tubo 2 o latão.

Tabela 1 – Propriedades dos tubos

Propriedade	Tubo 1	Tubo 2
Material	Aço A36	Latão
Módulo de elasticidade (E)	200 GPa	101 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0.32	0.35
Diâmetro interno	8 mm	12 mm
Diâmetro externo	12 mm	15 mm

Como proposta de solução deste problema foi adotada a distribuição de tensão conforme figura 9, onde a tensão radial e tangencial na fibra comum é considerada como sendo a pressão externa do tubo um como sendo a mesma pressão interna do tubo dois. O que proporciona a solução do problema numa abordagem individual.

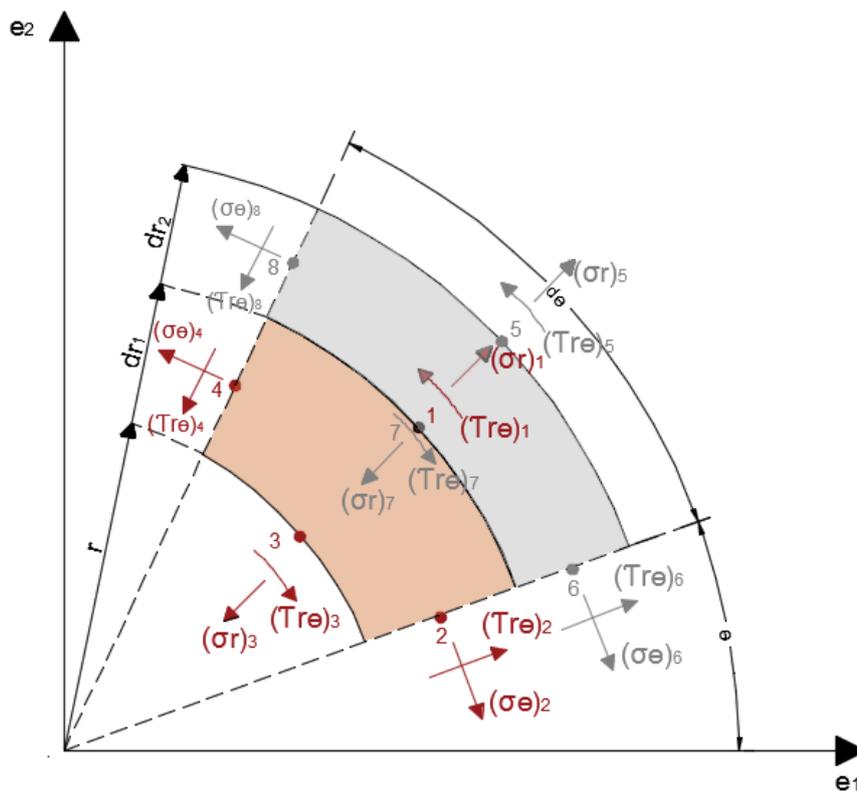


Figura 9 – Distribuição de tensões consideradas nos tubos cilíndricos.

Partindo do princípio da equação 35 e considerando que o problema não possui tensões cisalhantes e assumindo que não existem forças de volume, a equação de equilíbrio radial é dada pela equação 41. A outra equação é automaticamente satisfeita, pois não há variação de tensão tangencial.

$$\sum F_{radial} = \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (\text{Equação 73})$$

Utilizando a equação 41, sabendo que não haverá variação de comprimento provocada por tangente a face (v) e aplicando a relação deformação deslocamento dada pelas equações 39 e 40 na lei de Hooke vista no tópico 2.2.1, temos a seguinte relação abaixo que recai em uma equação diferencial ordinária de primeiro grau. Onde a solução geral para o deslocamento radial é dada pela equação 75, do qual c_1 e c_2 são constantes a determinar.

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \nu \cdot \frac{u}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \nu \cdot \frac{u}{r} - \frac{u}{r} - \nu \cdot \frac{du}{dr} \right) \right] = 0 \quad (\text{Equação 74})$$

$$u(r) = c_1 \cdot r + \frac{c_2}{r} \quad (\text{Equação 75})$$

A partir das soluções, as tensões resultam nas equações 76 e 77, do qual para esta problemática teremos quatro coeficientes a determinar do qual serão impostas pelas condições de contorno dados pela pressão interna e as tensões radiais e tangenciais na fibra comum dos elementos.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[c_1 \cdot (1+\nu) - c_2 \cdot \left(\frac{1-\nu}{r^2} \right) \right] \quad (\text{Equação 76})$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[c_1 \cdot (1+\nu) + c_2 \cdot \left(\frac{1-\nu}{r^2} \right) \right] \quad (\text{Equação 77})$$

Com as equações 76 e 77, podemos começar a resolver o problema, utilizando 4 condições de contorno para encontrar as constantes, são elas:

1º condição de contorno: A tensão na fibra comum deve ser igual nos dois materiais, ou seja:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{r7} \quad (\text{Equação 78})$$

2º condição de contorno: A tensão na parede interna do cilindro deve ser igual a pressão atuante:

$$\sigma_{r3} = -P_i \quad (\text{Equação 79})$$

3º condição de contorno: A tensão na parede externa do cilindro deve ser igual à pressão atuante:

$$\sigma_{r5} = 0 \quad (\text{Equação 80})$$

4º condição de contorno: O deslocamento radial na fibra comum deve ser igual nos dois materiais, ou seja:

$$u_1 = u_7 \quad (\text{Equação 81})$$

Aplicando as quatro condições de contorno, ficaremos com as seguintes equações:

$$\frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \cdot \left[c_1 \cdot (1 + \nu_1) - c_2 \cdot \left(\frac{1 - \nu_1}{r_{e1}^2} \right) \right] = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \cdot \left[c_3 \cdot (1 + \nu_2) - c_4 \cdot \left(\frac{1 - \nu_2}{r_{i2}^2} \right) \right] \quad (\text{Equação 82})$$

$$\frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \cdot \left[c_1 \cdot (1 + \nu_1) - c_2 \cdot \left(\frac{1 - \nu_1}{r_{i1}^2} \right) \right] = -P \quad (\text{Equação 83})$$

$$\frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \cdot \left[c_3 \cdot (1 + \nu_2) - c_4 \cdot \left(\frac{1 - \nu_2}{r_{e2}^2} \right) \right] = 0 \quad (\text{Equação 84})$$

$$c_1 \cdot r_{e1} + \frac{c_2}{r_{e1}} = c_3 \cdot r_{i2} + \frac{c_4}{r_{i2}} \quad (\text{Equação 85})$$

Com o auxílio do software MAPLESOFT v.18, o sistema de equações acima foi resolvido a fim de se obter os valores das constantes. A solução analítica desenvolvida para as constantes pode ser observada no anexo um. Com estas constantes definidas, e substituindo nas equações 75, 76,77 e 39,40 chegasse às equações gerais para resolução do problema em estudo, do qual ficaram em função das características geométricas e do material.

4. Análise de Resultados

4.1. Resultados Analíticos

A tabela 2 apresenta as soluções para o problema, que foram obtidas a partir das equações analíticas desenvolvidas anteriormente, onde podemos observar que as tensões radiais na fibra comum são iguais, as tangenciais já possuem uma diferença, então há duas respostas a serem analisadas na fibra comum, e o mesmo vale para as deformações, já o deslocamento se manteve igual, o que era esperado, já que foi uma condição de contorno para se encontrar as constantes.

Tabela 2 - Tabela de resultados

Tubo	r (mm)	σ_r (MPa)	σ_θ (MPa)	u (mm)	ϵ_r	ϵ_θ
1	4,0	-120	254,371	0,005855	-0,001007	0,001464
	6,0	-16,008	150,379	0,004665	-0,000321	0,000778
2	6,0	-16,008	72,93	0,004665	-0,000411	0,000778
	7,5	0	56,917	0,004227	-0,000197	0,000564

4.1.1. Tensão Radial e Tangencial

Com as equações 76 e 77, podemos traçar os gráficos das tensões, como mostra as Figuras 10 e 11, e ter ideia de como as tensões se comportam com a variação do raio e do tipo de material, observando que o gráfico se mantém constante em θ , já que as funções não dependem do ângulo.

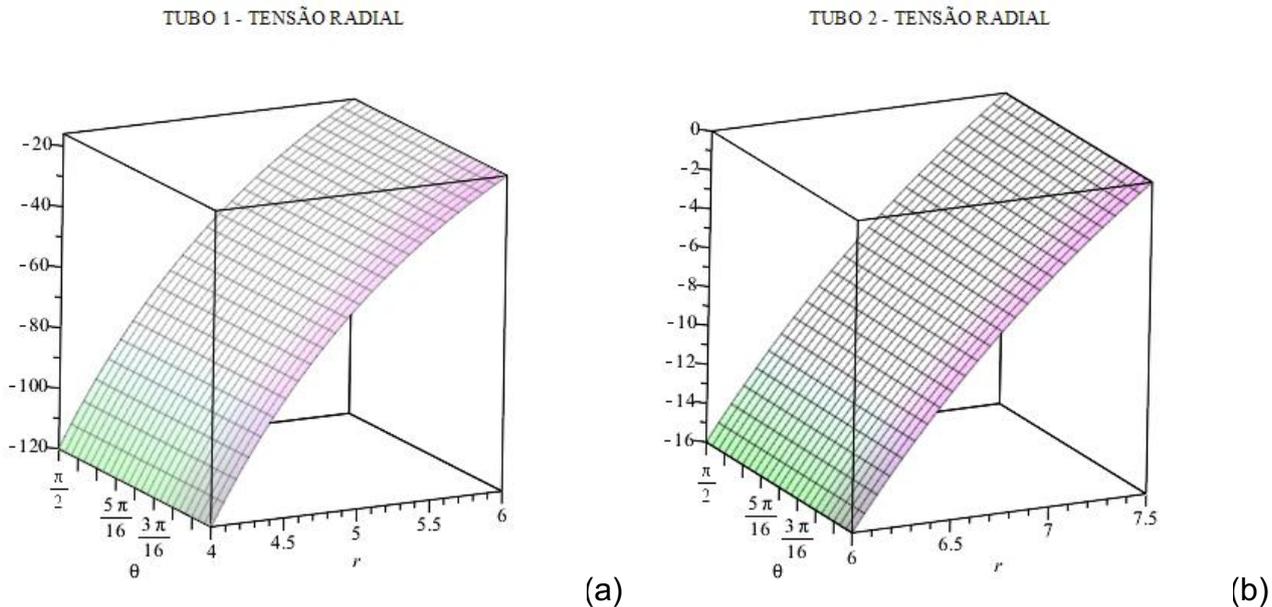


Figura 10 – (a) Tensão radial no tubo 1 e (b) Tensão radial no tubo 2

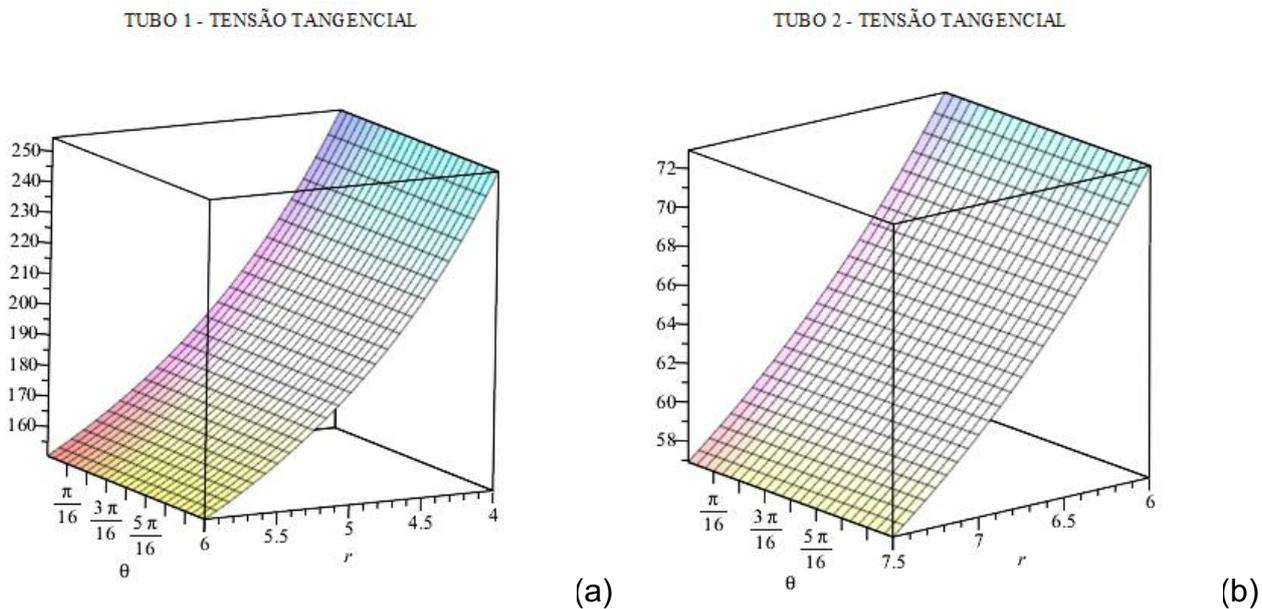
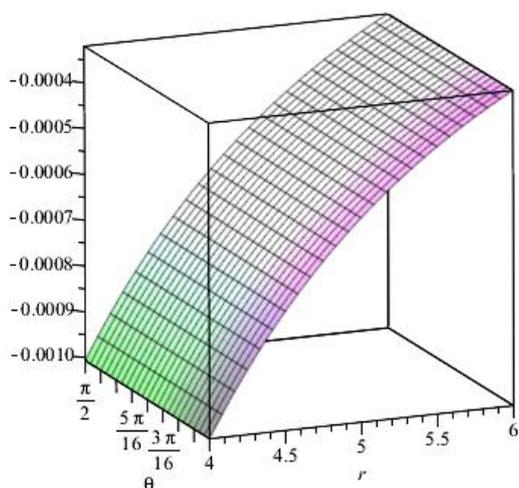


Figura 11 – (a) Tensão tangencial no tubo 1 e (b) Tensão tangencial no tubo 2

Observado a figura 12, nota-se um declínio das tensões com o aumento do raio nos dois tubos, o que era esperado, já que temos uma pressão uniforme no interior do cilindro, por isso o gráfico apresentou uma compressão do início ao fim do cilindro. Já as tensões tangenciais pode-se observar a mudança nas tensões quando há a troca de material, ou seja, quando o raio é igual a 6 mm.

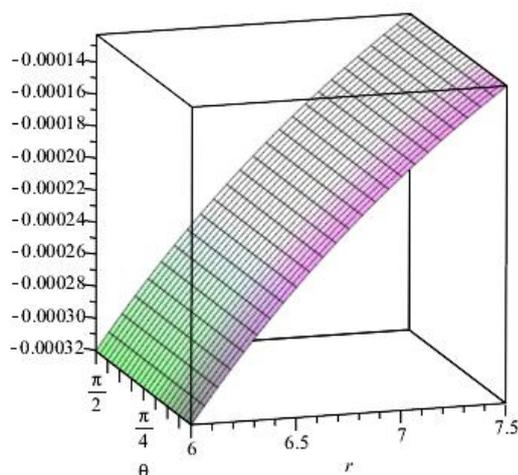
4.1.2. Deformação Radial e Tangencial

TUBO 1 - DEFORMAÇÃO RADIAL



(a)

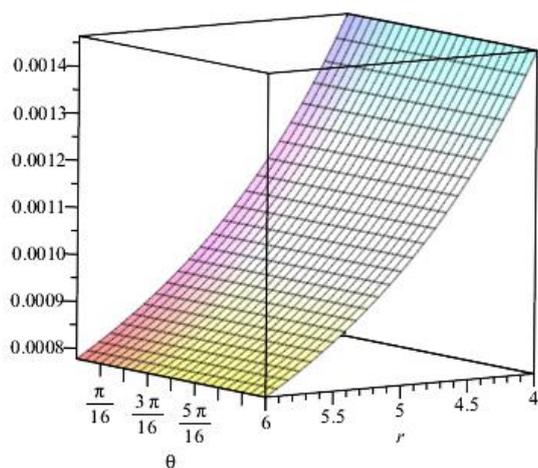
TUBO 2 - DEFORMAÇÃO RADIAL



(b)

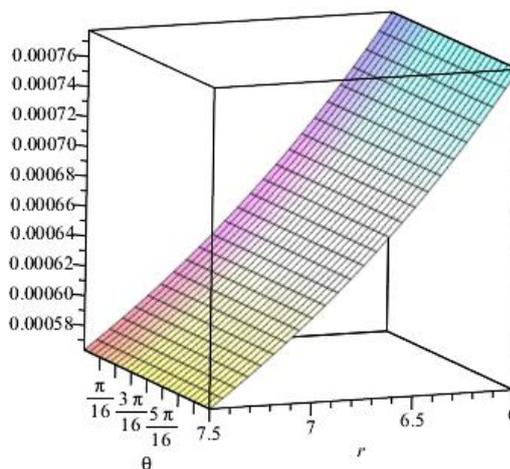
Figura 12 – (a) Deformação radial no tubo 1 e (b) Deformação radial no tubo 2

TUBO 1 - DEFORMAÇÃO TANGENCIAL



(a)

TUBO 2 - DEFORMAÇÃO TANGENCIAL



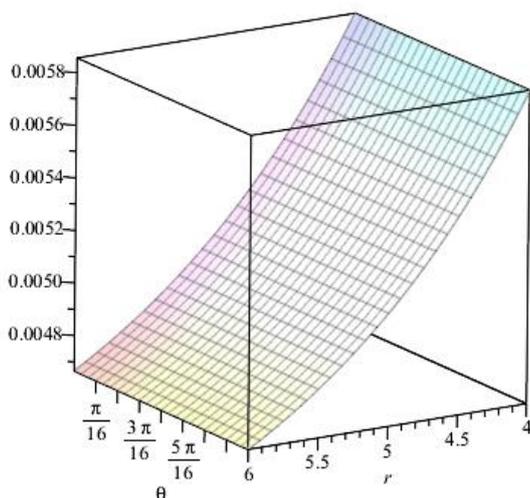
(b)

Figura 13 – (a) Deformação tangencial no tubo 1 e (b) Deformação tangencial no tubo 2

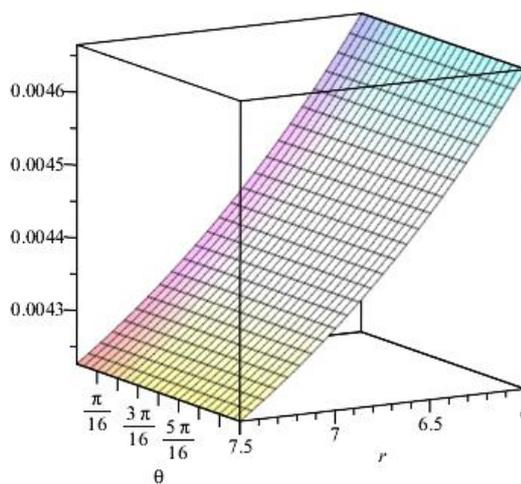
As figuras 12 e 13 mostram o comportamento das deformações variando com o raio, onde as maiores deformações se encontram quando o raio é igual a 4 mm, o que corresponde as maiores tensões que se encontram no mesmo ponto.

4.1.3. Deslocamento Radial

TUBO 1 - DESLOCAMENTO RADIAL



TUBO 2 - DESLOCAMENTO RADIAL



(a)

(b)

Figura 14 – (a) Deslocamento radial no tubo 1 e (b) Deslocamento radial no tubo 2

A figura 14 mostra que o maior deslocamento ocorre no interior da tubulação, onde há a atuação da pressão interna. Neste ponto temos as maiores tensões, e por consequência, as maiores deformações, já que todas essas respostas são dependentes do deslocamento. Uma vez obtido os deslocamentos, é fácil de ter uma previsão de como será a distribuição das tensões nos elementos.

4.2. Resultados Numéricos

A fim de se obter uma comparação com os resultados analíticos para a análise linear, foi feita uma análise numérica utilizando o software MIDAS FEA v.2.9.6, que se baseia nos elementos finitos para resolução dos problemas. Para a análise, foi modelado um quarto da seção circular e inserido apoio nas regiões 1 e 2 do elemento no qual podem ser vistos na figura abaixo. A Malha de elementos finitos foi feita com elementos retangulares onde foi dividida tangencialmente a face em dezesseis nós e na direção longitudinal em oito nós para a seção do aço e seis nós para a sessão do latão, com o objetivo de obter uma análise mais sucinta do elemento. A tensão atuante internamente ao tubo foi transformada em forças radiais uniformemente distribuídas na face interna ao tubo. Para esta análise foi adotado o estado plano de deformações.

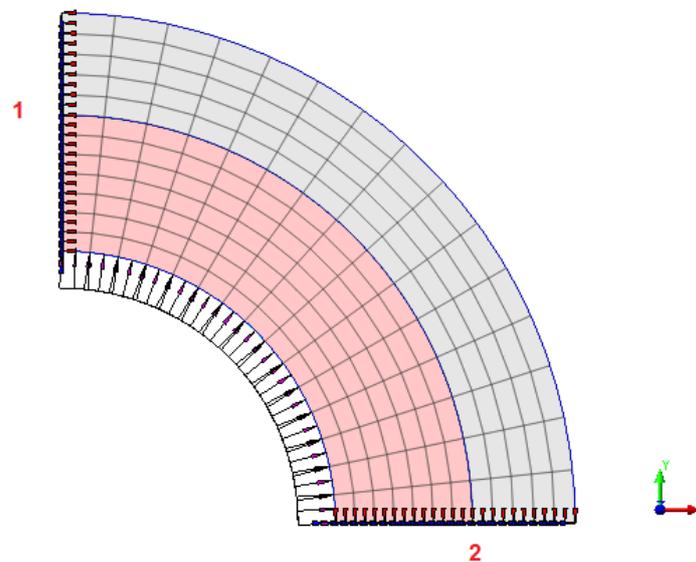


Figura 15 – Modelo da sessão transversal inserido no MIDAS FEA v.2.9.6.

4.2.1. Tensão Radial e Tangencial

As tensões radiais e tangenciais geradas pelo software podem ser vistas nas figuras abaixo juntamente com o gráfico de propagação das tensões de acordo com o raio. Notasse que para as tensões radiais a tendência seria uma polinomial decrescente onde a tensão na face interna do tubo seria igual à pressão interna aplicada. Quanto maior o raio, maior é o decaimento dessas tensões, tendendo a zero na face externa da sessão. Já para as tensões tangenciais, é possível observar que reduz bruscamente as tensões quando os cilindros de diferentes materiais se interligam. Onde analiticamente encontramos dois resultados para a fibra comum entre os elementos. A tensão tangencial na borda interna do tubo chegou a um valor de 254 MPa no raio de quatro milímetros, o que nos chama atenção, pois o limite de escoamento para o aço ASTM A36 é de 250 MPa. O aumento de pressão interna poderia levar a chapa a fissuração ou até mesmo a ruptura do elemento.

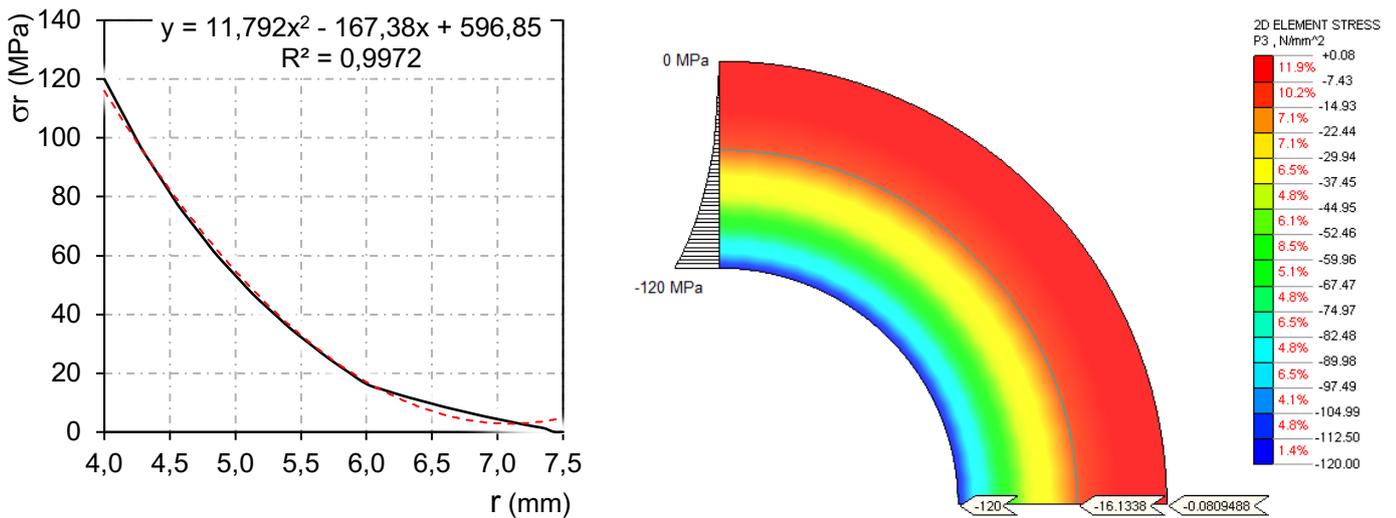


Figura 16 – Distribuição de tensões radiais.

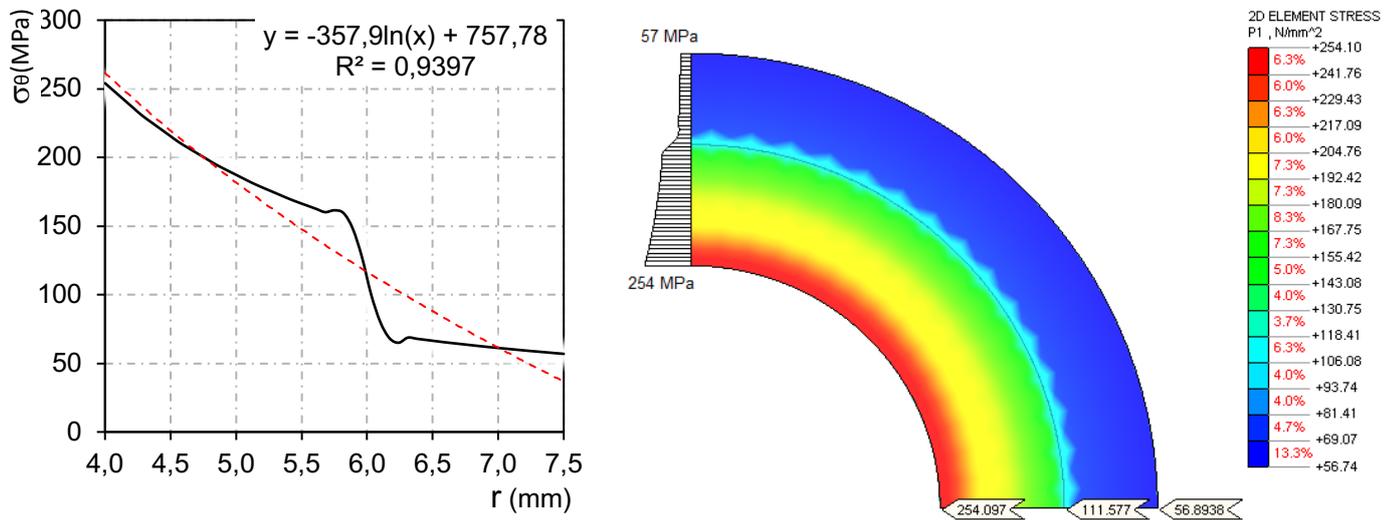


Figura 17 – Distribuição de tensões tangenciais.

4.2.2. Deformação Radial e Tangencial

As deformações radiais e tangenciais se portam de forma semelhante, sendo uma tendência potencial decrescente, estando dentro do limite de deformação elástica como se pode observar nas figuras de propagação das deformações logo abaixo. Sabendo-se que quanto maior o módulo de elasticidade do material, mais rígido é o material, e que conseqüentemente menor será sua deformação, a troca de posições do aço para o latão, poderia mudar consideravelmente a forma como a peça toda se deforma.

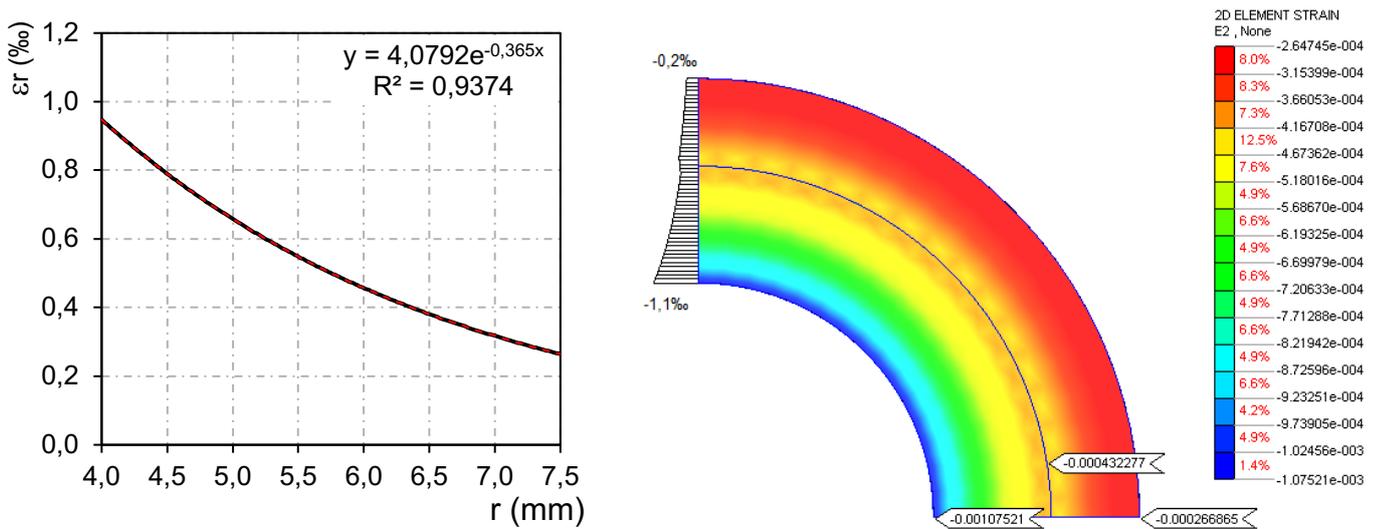


Figura 18 – Distribuição de deformações radiais.

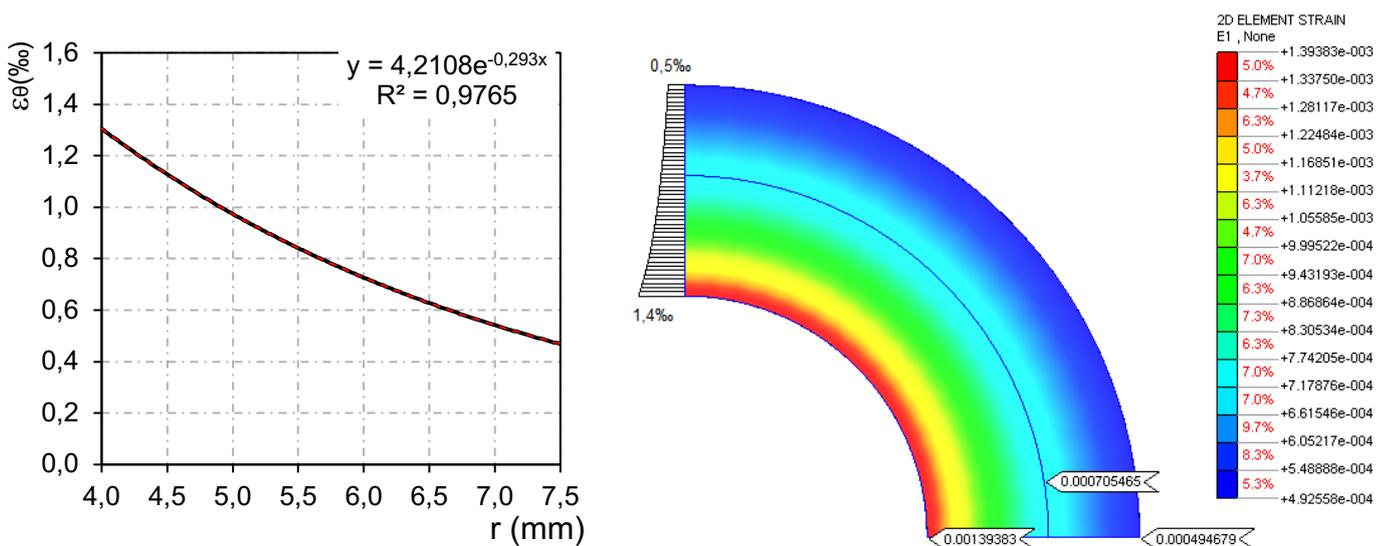


Figura 19 – Distribuição de deformações tangenciais.

4.2.3. Deslocamento Radial

O deslocamento dos tubos foram pequenos devido à pressão interna não ser muito elevada. Do qual podemos observar que o maior deslocamento foi de 0,0055 mm na fibra interna do tubo e para a fibra externa o deslocamento foi de 0,0037 mm. Nos resultados analíticos estes valores foram de 0,0058 mm e 0,0043 mm consequentemente dando uma variação de 5% e 14% dos resultados computacionais. Mostrando que os resultados analíticos foram muito mais conservadores. A média de variação entre os resultados de deslocamento foi de 9,5% numa amostra de 51 resultados.

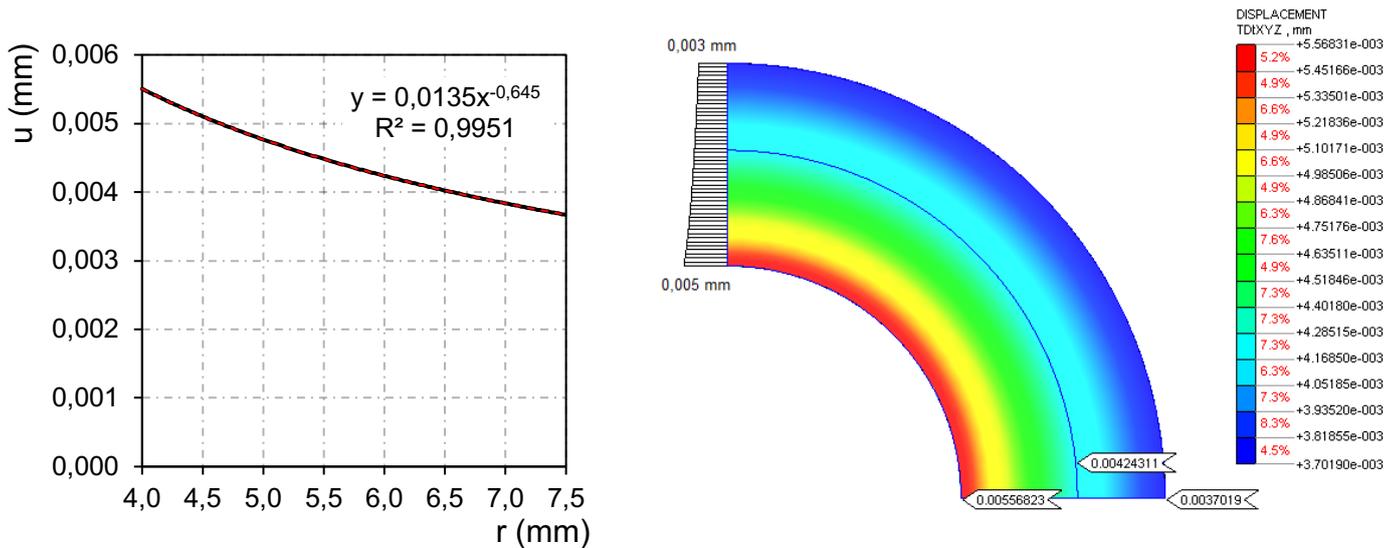


Figura 20 – Distribuição de deformações tangenciais.

5. Considerações Finais

A proposta para o estudo de tubos cilíndricos compostos foi de analisar a propagação das tensões e das deformações quando submetido a uma pressão interna de aproximadamente 48% da tensão admissível do primeiro material inserido internamente ao tubo, que era um aço A36 cujo limite de escoamento segundo Pfeil e Pfeil (2009), é de 250 MPa e a resistência à ruptura é de 400 MPa.

Portanto analisando analiticamente e numericamente no software MIDAS FEA v.2.9.6 percebemos que as tensões radiais se mantiveram num regime polinomial como podemos ver na figura abaixo, com resultados bem semelhantes entre a análise do qual em média variou 2% os resultados. Do qual já era previsto que a tensão radial interna ao tubo seria igual à pressão interna e a externa ao tubo seria zero, forme condições de contorno aplicadas para o problema. Já para a análise da tensão tangencial, foi possível observar que a tensão máxima tangencial foi de 254 MPa e graficamente quando chegamos à fibra comum entre os dois materiais há uma queda brusca nos valores das tensões do qual analiticamente conforme tabela 2 podemos perceber nos cálculos que houve dois resultados para o mesmo valor de raio da fibra comum. Graficamente podemos ver também, uma variação nos resultados analíticos pros numéricos, aonde na fibra comum chegou a variar em 10% os resultados.

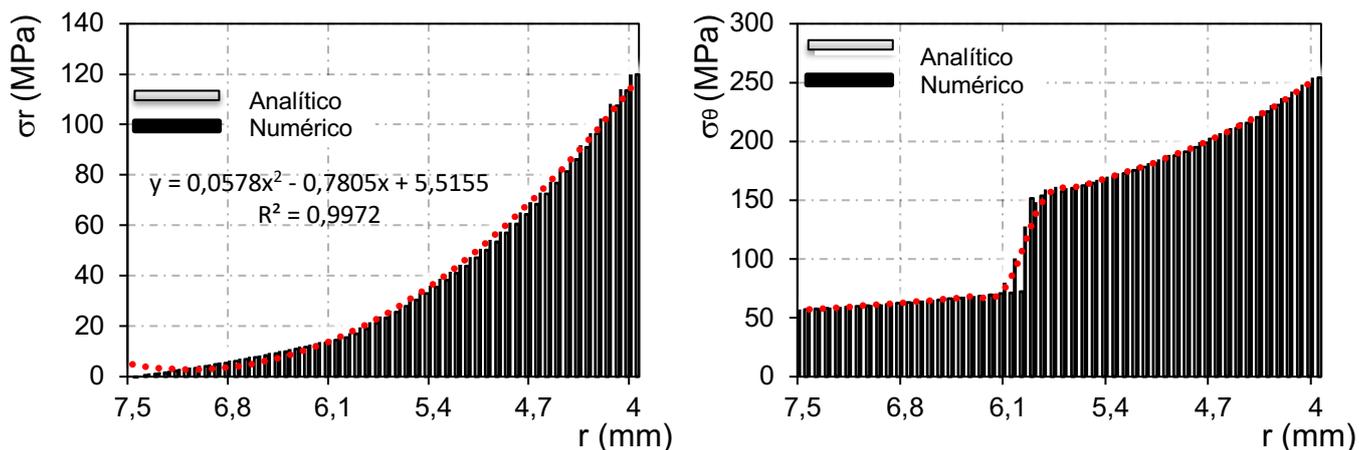


Figura 21 – Tensões Radiais e Tangenciais Comparativas

As variações para deformações foram ainda maiores que as tensões. Aonde as deformações radiais chegaram a variar em 15% e as tangenciais em 8%. Foi possível observar que o método numérico do Software arredonda os números de deformação o que torna dessa forma os números analíticos mais confiáveis. Contudo nas deformações radiais o maior resultado foi o numérico com 1,1 ‰ na fibra interna e nos resultados da deformação tangencial o maior foi o resultado analítico com 1,46 ‰ na fibra interna.

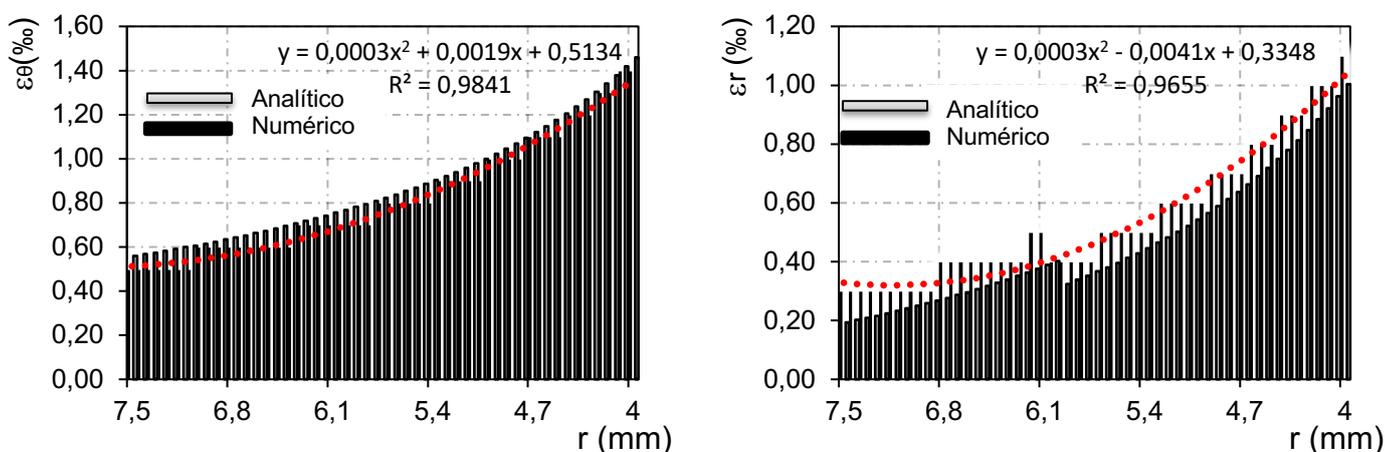


Figura 22 – Deformações Radiais e Tangenciais Comparativas

Já os resultados de deslocamento, foram mais desiguais. Do qual os resultados analíticos foram bem maiores, chegando a variar em média 9,5% dos resultados numéricos. O deslocamento máximo ocorreu na fibra interna do tubo, que foi de 0,0058 mm no resultado analítico e 0,0056 mm no numérico, chegando a uma variação de 5% do resultado numérico.

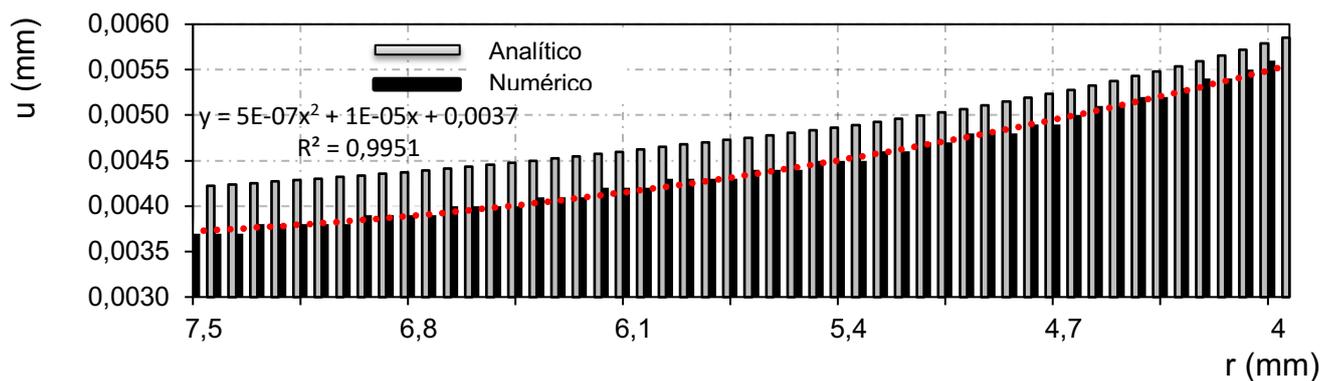


Figura 23 – Deslocamentos radiais comparativos

Estas variações se deram pelos diferentes planos de análise, onde para a análise analítica partiu-se do estado plano de tensões e para o computacional do estado plano de deformações. Onde se pode observar que os resultados analíticos foram mais conservadores, pelo fato do software MIDAS FEA v.2.9.6 trabalhar com o método dos elementos finitos, os resultados de deslocamento e do campo de deformações são aproximados. Contudo o melhor modelo que atende essa problemática é partindo do estado plano de deformações, pois o elemento é considerado como sendo submetido a forças perpendiculares, não sofrendo variação na terceira dimensão e sendo infinito nesta terceira dimensão, do qual foi o caso aplicado para a análise numérica.

6. Referências Bibliográficas

- CODA, Humberto Breves. **FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DOS MATERIAIS E DAS ESTRUTURAS**. São Paulo: Notas de Aula, 2013. 165 p.
- HIBBELER, R. C. **RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**. 5. Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.
- OLIVELLA, Xavier Oliver; BOSCH, Carlos Agelet de Saracibar. **MECÂNICA DE MEDIOS CONTÍNUOS PARA INGENIEROS**. Barcelona: UPC, 2000. 280 p.
- PFEIL, Walter; PFEIL, Michèle. **ESTRUTURAS DE AÇO: DIMENSIONAMENTO PRÁTICO**. 8. ed. Rio de Janeiro: Ltc - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2009. 382 p.
- TEOTÔNIO, K. L. **OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR USANDO O MEC**. Brasília, 2014. 106f. Dissertação (Mestrado em Integridade dos Materiais) - Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade de Brasília.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J.N. **TEORIA DA ELASTICIDADE**. 3. Ed. Tradução: PUC-RJ: Guanabara Dois, 1980. 545 p.