

PROCESSOS DA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS COM O GEOGEBRA: O CASO DO LIMITE DE FUNÇÕES REAIS

Antonio José da Silva
Fernando Becker

Resumo

Propusemos conhecer os processos construtivos que alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral apresentam sobre limite. Para obter essas noções, objetos de aprendizagem (OA) foram criados e disponibilizados online com acesso aberto em um site. O objeto de aprendizagem A2, utilizado nesta pesquisa, foi elaborado contendo uma situação-problema que permite o estudo de situações que envolvem limites de funções reais de uma variável. A atividade A2, foi elaborada com o *software* Geogebra. Este artigo relata os resultados da atividade A2. Trata do problema conhecido como "O Fracasso do Cálculo". A metodologia consistiu na aplicação de atividades na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Nelas interagiram alunos e OA. Para a complementação e investigação, foram feitas entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano, objetivando identificar processos de desenvolvimento e aprendizagem. Fundamenta-se a análise das respostas na Epistemologia Genética; em especial, na abstração reflexionante. A escolha deu-se devido ao caráter explicativo dessa teoria da gênese do conhecimento matemático. Os resultados demonstram que conhecimentos foram construídos em situação de interação entre alunos e OA. Os processos de construção de conhecimento foram analisados e registrados, ao todo foram seis (C1, C2, C3, C4, C5 e C6). A teoria da abstração reflexionante mostrou-se eficaz para a análise do desenvolvimento e da aprendizagem, constituindo-se assim, uma importante teoria que fundamenta a prática docente.

Palavras-chave: Noção de Limite; Objetos de Aprendizagem; Abstração Reflexionante; Geogebra.

Abstract

We propose to know the constructive processes that students of the discipline Differential and Integral Calculus present on limit. To get these notions, learning objects (OA) were created and made available online with open access on a website. The learning object A2, used in this research, was elaborated containing a problem situation that allows the study of situations involving limits of real functions of a variable. Activity A2 was elaborated with Geogebra software. This article reports the results of Activity A2. It deals with the problem known as "The Failure of Calculus". The methodology consisted in the application of activities in the discipline Differential and Integral Calculus. In them they interacted students and OA. For the complementation and investigation, interviews were made inspired by the Piagetian clinical method, aiming to identify processes of development and learning. The analysis of the answers in the Genetic Epistemology is based; in particular, in reflective abstraction. The choice was due to the explanatory character of this theory of the genesis of mathematical knowledge. The results demonstrate that knowledge was built in a situation of interaction between students and OA. The processes of knowledge construction were analyzed and recorded, in total there were six (C1, C2, C3, C4, C5 and C6). The theory

of reflective abstraction proved to be effective for the analysis of development and learning, and thus constitutes an important theory that underlies the teaching practice.

Keywords: *Notion of Limit; Learning Objects; Reflective Abstraction; Geogebra.*

1.Introdução

Tanto no âmbito da Educação Básica quanto da Educação Superior, o docente se depara com diversas situações que não são exitosas sob o ponto de vista de resultados, mas deveriam ser sob o ponto de vista da capacidade de produzir conhecimento, e no escopo da educação matemática essa perspectiva é estudada (PAIS, 2011; ALMOULOU, 2007; FIORENTINI; LORENZATO, 2012). Jean Piaget defende, como uma das finalidades da educação, a formação científica do aluno, capaz de gerir e construir conhecimento (PIAGET, 1970). Defendemos essa abordagem como objetivo da educação escolar.

Sob o olhar da Informática Aplicada à Educação (IE), a conduta do aluno frente ao conhecimento deve ser o de um explorador, quer seja por atividade individual quer seja em grupo, mas que, nessas ações, esse aluno possa tomar consciência de suas ações e dos mecanismos que se valeu para obter êxito; é assim que aprenderá (VALENTE, 2002a; FAGUNDES; SATO; MAÇADA, 1999; BECKER, 2012). Para desenvolver o tema IE, é necessário analisar na totalidade esse conceito que passa pelo de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Segundo Blunter (1999, p. 01), TIC: “é o conjunto de ferramentas e recursos tecnológicos usados para comunicar, criar, disseminar, armazenar e gerenciar informação”. Sendo assim, as TIC são compreendidas no escopo da IE, tendo sua importância configurada nas práticas cada vez mais constantes por meio de *softwares*, ambientes informatizados e virtuais que objetivam a aprendizagem escolar (SILVA; BECKER, 2016; 2017). Em Silva e Becker (2016b) foi realizado um estudo sobre noções de limite. Nesse estudo, os conhecimentos matemáticos, as noções de limite, foram relacionadas entre si, caracterizando grupos de desenvolvimento.

Este trabalho se insere em um contexto escolar universitário. O sujeito da pesquisa é o aluno que cursa a disciplina Cálculo Diferencial e Integral e, segundo Becker (2012), o aluno só construirá conhecimento, ou melhor, só aprenderá se agir e problematizar a própria ação, apropriando-se dos mecanismos íntimos dessa ação.

A epistemologia genética (EG) se propõe a estudar como o ser humano constrói seu conhecimento ou sua capacidade cognitiva, considerando esse sujeito um ser biológico e que age sobre o meio por força das estruturas que construiu. O conhecimento resulta de um processo ativo em que um indivíduo o elabora a partir da realidade (interna ou externa).

Esta pesquisa é parte da pesquisa apresentada na tese “**NOÇÃO DE LIMITE DE FUNÇÕES REAIS E GEOGEBRA: Um estudo em Epistemologia Genética**”. Nesta pesquisa abordaremos os resultados relativos aos processos construtivos referentes à atividade A2 que traz a problemática da área de uma figura geométrica plana regular como função de seus lados.

Problemas de pesquisa relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, não constituem uma novidade, contudo ainda é um problema em aberto (BARUFI, 1999). Nesta pesquisa faremos uma abordagem focada nos aspectos construtivos de conceitos matemáticos, observados sob a ótica da Epistemologia Genética (EG), e especificamente a Abstração Reflexionante (AR).

Em Piaget (1995) temos uma abordagem teórica e prática dos estudos da AR.

1.1 O problema e os objetivos da pesquisa

A questão problema desta pesquisa é: “Quais os processos construtivos relativos ao conceito de limite de funções que alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, do Curso de Licenciatura em Ciências Naturais, apresentam na interação com objetos de aprendizagem do Geogebra em ambiente virtual?”. O objetivo desta pesquisa é analisar, pelo espectro da epistemologia genética, os processos construtivos, realizados pelos alunos, que envolvem o conceito de limite de funções na interação com um *applet* elaborado com o Geogebra, em ambiente virtual. Quer-se investigar processos de abstração reflexionante realizados por eles ao tentar conceituar “limite de funções”.

A educação traz à tona temas sempre relevantes e atuais, e a inserção de alguns temas, dispositivos móveis, informática, Internet e TIC, torna-se necessária considerando que a escola reflete a sociedade; essa, por sua vez, se modifica à medida que essas temáticas se inserem na realidade dos indivíduos. Portanto, acompanhar as necessidades dessa sociedade que gira em torno da informação, seja por *sites*, seja pela televisão, seja pelas redes de relacionamento em tempo real, tornou-se uma tarefa indispensável à escola.

Neste trabalho, trata-se a atividade como uma situação-problema. Para Dolle (2011, p. 13), “É colocando o aluno diante de situações-problema que ele é solicitado a construir sua solução e, assim, a fornecer a explicação para estas”. As atividades são tratadas como elementos que possibilitam a aprendizagem dos alunos frente aos conteúdos da disciplina CDI.

A presente pesquisa reveste-se de relevância na área de Educação Matemática e na Informática Aplicada à Educação por abordar um assunto que, embora já conhecido e pesquisado, ainda necessita de aprofundamento e permanece como um problema em aberto (BARUFI, 1999; MACHADO, 1993; REZENDE, 2003; TALL, 1992,1995; VINNER; TALL, 1981). A importância dos conhecimentos do CDI para as ciências e a própria matemática é um fator que também justifica a pesquisa.

2.Fundamentação teórica

A sala de aula corresponde a uma aplicação possível para a EG, mesmo não sendo explícito o direcionamento dos estudos de Piaget para esse *lôcus*, é possível estabelecer uma relação dessa teoria com o ambiente escolar nos olhares do aluno e do docente. Segundo Becker e Marques (2012), a pesquisa e a docência caminham juntas, ou, pelo menos, deveriam, afinal, segundo esses autores, a pesquisa aprimora a docência. Nesse sentido, é importante que o professor pesquise a sua prática.

Os sujeitos se valem de suas estruturas cognitivas para criar outras à medida que lhe são solicitadas, assim se desenvolve e aprende. Segundo Mendes (2009, p. 113): “[...] a informática é considerada uma das componentes tecnológicas mais importantes para a efetivação da aprendizagem matemática no mundo moderno”. A informática na educação matemática se estabelece na estrutura metodológica como meio de superar os obstáculos à aprendizagem. A proposta de utilizar o *software* Geogebra associado à tecnologia *Google Drive*, permite que registros sejam coletados e organizados em planilhas *online*. Essas tecnologias se configuram como alternativa real, considerando a sua fácil manipulação, a ampla utilização em laboratórios virtuais tanto por professores quanto por alunos, e disponíveis em dispositivos móveis, como *tablets* e computadores portáteis. A contribuição da informática nesta pesquisa vai além da utilização de *softwares* para

obter resultados ou dados, está na possibilidade de melhor entender as relações dos alunos com computadores à luz de uma teoria sólida e amplamente difundida, como a EG, e, nesse sentido, os trabalhos de Fagundes; Sato e Maçada (1999), e Valente (2002b) reforçam essa prática.

Segundo Dolle (2011, p. 13), “Conhecer a explicação não é explicar. É preciso, primeiro, a compreensão, ou seja, a representação do encadeamento e fornecer, assim, a explicação”. Piaget afirmava que os fatores externos e os internos são indissociáveis e de igual importância para o conhecimento. Ele apresentou discussão a esse respeito em duas obras que se complementam, o “Tomada de Consciência” (PIAGET, 1977) e o “Fazer e Compreender” (PIAGET, 1978), ambas referências utilizadas nesta proposta de pesquisa. Outra obra de referência para esta pesquisa é a “Abstração Reflexionante” (PIAGET, 1995). Para Becker (2012b, p. 35):

[...] [AE] apoia-se sobre os observáveis dos objetos e das ações nas suas características materiais [...] aquilo que o objeto ou as ações em suas características materiais possuíam antes de o sujeito agir sobre eles. Enquanto [a AR] apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito.

A abstração empírica limita-se a fornecer informações e dados do objeto. Ela não é fonte de novas construções. A abstração reflexionante realiza essa tarefa, pois “[...] toda abstração empírica necessita, para se efetivar, de quadros de conhecimentos que foram criados graças a uma abstração reflexionante prévia”. A abstração reflexionante realiza-se, portanto, pela retirada das qualidades das coordenações de ações do sujeito repassando-as para um patamar superior e reorganizando-as nesse patamar. A AR pode se apresentar sob duas formas: a abstração pseudoempírica e a abstração refletida.

As abstrações pseudoempíricas (*pseudo-empiriques*) ocorrem “[...] a partir de objetos materiais, como se tratassem de abstrações empíricas, [no entanto] as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nestes objetos por atividades do sujeito.” (PIAGET, 1995, p. 06). Nesse tipo de AR, “[...] o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações” (PIAGET, 1995, p. 274). Já a abstração refletida (*réflechie*) implica em TC, ou seja, apropriação dos mecanismos gerais da ação e se trata de “[...] um processo de abstração reflexionante, procedendo por reflexão sobre as reflexões particulares” (PIAGET, 1995, p. 18). A abstração reflexionante desperta o interesse de muitos educadores, se valendo dela como referencial teórico de suas pesquisas, ou até mesmo dedicando-se em demonstrar como essa teoria pode contribuir para explicar os fenômenos que envolvem o ensino e a aprendizagem. A EG é uma teoria do conhecimento que consiste em descrever os processos pelos quais se produz conhecimento em geral e o científico em particular, mediante sua gênese (DOLLE, 2011; PIAGET, 1977b).

O Método Clínico Experimental, Psicogenético ou Crítico (MC), amplamente difundido por Jean Piaget e seus colaboradores, foi o mais adequado que Piaget encontrou para responder as suas inquietações iniciais. Objetivando responder suas questões de pesquisa, Piaget utilizou o MC para coletar dados sobre os mais íntimos processos cognitivos da criança. Piaget estruturou uma teoria para explicar a gênese dos conhecimentos coletados, a Epistemologia Genética.

Vê-se que o método clínico é um método poderoso para obtenção de dados sobre os processos efetuados pelo sujeito para construir seu conhecimento ou sua capacidade cognitiva. Entrevistas inspiradas no MC, associadas com as tecnologias,

possibilitou a coleta de dados referentes a estudantes em situação de aprendizagem escolar, e a EG, mais especificamente pelo processo de abstração reflexionante, permitiu a análise do processo de construção do conhecimento do CDI desde o surgimento da noção de limite de funções reais até os processos que conduziram à aprendizagem de seus conceitos fundamentais.

O Geogebra (GGB) é um *software* livre de matemática e multiplataforma. Possui amplos recursos que possibilitam o desenvolvimento de estruturas de OA simples e de alta complexidade (ALBERTO; COSTA; CARVALHO, 2010).

3. Metodologia

Esta pesquisa é de natureza aplicada. Quanto aos objetivos, é descritiva/explicativa e sua abordagem é qualitativa. (PRODANOV; FREITAS, 2013). O núcleo metodológico desta pesquisa é constituído por três procedimentos sequenciados (P1, P2 e P3), distintos, porém complementares entre si. Os procedimentos P1, P2 e P3 compõem a estrutura metodológica geral desta pesquisa.

Procedimento 1 (P1) – Análise e resolução da situação-problema – a atividade A2 foi programada com o professor da disciplina CDI. Os assuntos tratados na situação-problema foram relativos aos conceitos que envolvem limites. Os registros foram coletados com a utilização de tecnologia *Google Drive*. A atividade A2 foi aplicada ao final do primeiro terço da disciplina CDI, o que equivale à conclusão da unidade disciplinar relativa ao estudo de limites de funções.

Procedimento 2 (P2) – Entrevista inspirada no método clínico utilizado por Jean Piaget – Foi feita a entrevista visando coletar dados sobre as ações e os processos construtivos dos conhecimentos, realizados pelos alunos com os *applets* contidos na situação-problema. Subsidiaram a entrevista os registros escritos, coletados anteriormente via tecnologia *Google Drive*. A entrevista, registrada em áudio e vídeo, é iniciada a partir de questionamentos advindos da situação-problema contidas na atividade A2. A entrevista foi inspirada no MC.

Procedimento 3 (P3) – Análise dos dados obtidos – Para a realização da análise, as entrevistas foram transcritas e, a partir dos vídeos. Foram incluídos nesse procedimento os registros escritos de respostas, coletados em P1. Utilizou-se como aporte teórico a abstração reflexionante para análise das falas, ações e registros escritos de respostas.

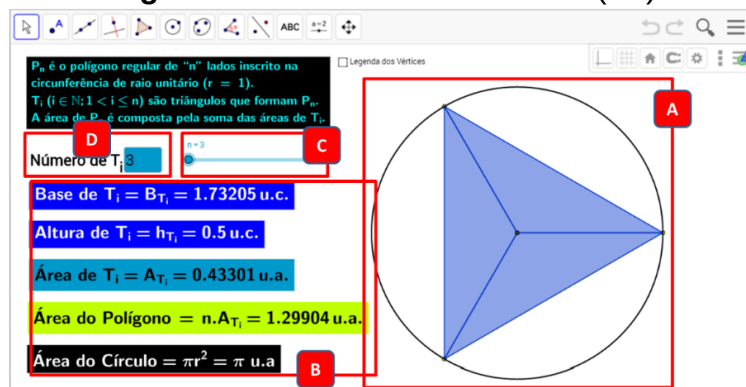
A análise procurou caracterizar e registrar os processos construtivos do conhecimento de limites, ocorridos na interação entre alunos e situações-problema, especificamente com os *applets* do Geogebra. Privilegiou-se a análise dos processos construtivos, por abstração reflexionante, que ocorreram antes e depois do estudo de conhecimentos específicos de limites de funções. Foram investigadas as relações de conhecimento construídas pelos alunos. A análise das respostas foi feita considerando os aspectos construtivos do conhecimento de limite de funções. Essa análise ocorreu de acordo com os fundamentos da EG, especificamente pela abstração reflexionante.

O universo desta pesquisa é o conjunto de estudantes de graduação da UFMA matriculados em disciplinas que tratam de temas relativos ao estudo de limites de funções. A amostra de alunos que participaram desta pesquisa foi composta por 18 alunos do primeiro ou segundo períodos do curso de Licenciatura em Ciências Naturais da UFMA, matriculados na disciplina CDI.

A atividade 2 (A2) trata do fato de termos um polígono inscrito na circunferência para a estimativa da área do círculo. É uma atividade com

possibilidades de exploração do conceito de limite em várias situações. A atividade A2 foi disponibilizada para acesso livre no endereço: <http://geogebra.nasnuvens.net.br/atividades/a02/>. Esta atividade foi originada a partir de um OA disponibilizado pelo professor Thales Vieira em sua página: www.im.ufal.br/professor/thales/tics/. O applet desse OA foi modificado, sendo incorporado a ele novos recursos em conformidade às exigências desta pesquisa.

Figura 1: Interface da atividade 2 (A2)



Fonte: Próprio Autor

A atividade A2, Figura 1, apresenta uma circunferência C de centro O e raio r . Inscrito nessa circunferência temos um polígono regular P_n com número de lados $n \geq 3$ e comprimento do lado $l > 0$, conforme está descrito na Figura 1 no item **A**. O círculo tem área $A(C) = \pi r^2$. P_n é composto por triângulos isósceles T_i idênticos. Os lados isósceles de T_i tem medida r . O número de lados pode ser alterado por meio dos controles deslizantes laterais e controle de entrada numérica observada nos itens **C** e **D** da Figura 1. A implicação direta disso é a alteração do número de triângulos. O Quadro **B** destaca os valores numéricos que variam em função de n , e, nele, temos a base B_{T_i} de T_i , que é também $l > 0$ de P_n . Temos a altura h_{T_i} de T_i , a área A_{T_i} de T_i , a área do polígono $A(P_n) = n \cdot A_{T_i}$ e a área do círculo $A(C) = \pi r^2 = \pi$, pois $r = 1$. O círculo é delimitado pela circunferência C e S_i é a área resultante da diferença entre a área do círculo e a área de P_n interno a C .

Conhecimento Matemático: Variando n , o valor de $A(P_n)$ varia diretamente, se n aumenta, $A(P_n)$ aumenta; da mesma forma que se $A(P_n)$ diminui, é porque n foi diminuído. Se $n \rightarrow \infty$, a implicação direta é que $A(P_n) \rightarrow A(C)$. Outras implicações são que se $n \rightarrow \infty$, então $l \rightarrow 0$, ou seja, a base $B_{T_i} \rightarrow 0$, a altura $h_{T_i} \rightarrow r = 1$, $A_{T_i} \rightarrow 0$ e $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$, e, nesse caso, podemos escrever: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$. Conhecimentos podem ser construídos a partir do applet. Os alunos poderão:

- C1. Reconhecer que se $n \rightarrow \infty$, a implicação direta é que $A(P_n) \rightarrow A(C)$ por diferença de áreas em que $S_i \rightarrow 0$;
- C2. Compreender que se $n \rightarrow \infty$, então $l \rightarrow 0$ ($B_{T_i} \rightarrow 0$);
- C3. Compreender que se $n \rightarrow \infty$, então a altura $h_{T_i} \rightarrow r = 1$;
- C4. Compreender que se $n \rightarrow \infty$, $A_{T_i} \rightarrow 0$;
- C5. Concluir que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$;
- C6. Concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$.

É interessante observar que o conceito de limite está presente na descrição desse processo em diversas situações.

4. Análise dos dados

Os registros escritos da atividade 2 foram coletados no final da unidade 1 (U1) da disciplina CDI. As entrevistas relativas a essa atividade ocorreram também no final dessa unidade. Na sequência do texto, serão descritos os resultados por aluno, devidamente identificados com código.

4.1 Processos de construção de conhecimentos

Serão relatados os processos de construção de conhecimento dando ênfase aos tipos de abstração, empírica e reflexionante. O ato de considerar n tender para infinito é um processo que ocorre por abstração refletida, assim como fazer l tender para zero. Pode-se dizer também, que fazer l tender para zero ou fazer n tender para infinito, são construções do conceito de limite.

Na A2, foram identificados 6 conhecimentos e/ou processos durante sua elaboração. Todos foram identificados após serem realizadas as análises dos registros escritos e transcritos dos alunos. Serão relatados os processos de construção de conhecimento dando ênfase aos tipos de abstração, empírica e reflexionante.

O conhecimento C1 (Reconhecer que se $n \rightarrow \infty$, a implicação direta é que $A(P_n) \rightarrow A(C)$ por diferença de áreas em que $S_i \rightarrow 0$) foi construído por abstrações pseudoempíricas ao serem realizadas alterações no número de triângulos do polígono P_n . Posteriormente por abstração refletida, decorrente de várias comparações entre as áreas, compreende o mecanismo de aproximação pela diferença entre as áreas. Houve alunos que ao variar o número de triângulos, não reconheceram a diferença entre as áreas, e sim uma convergência do valor das áreas do polígono para a área do círculo a cada variação de n .

O conhecimento C2 (Compreender que se $n \rightarrow \infty$, então $l \rightarrow 0$ ($B_{T_i} \rightarrow 0$)) foi construído por repetidas abstrações pseudoempíricas, ocorridas pela alteração do número de triângulos e observações de valores no *applet*. Concluíram muitas vezes que a base tende para zero observando os valores na tela. Por abstração refletida compreenderam que os valores ficam próximos de zero e a afirmação que tende para zero ocorre sem a base ter o valor zero, o que demonstra que houve a conceituação de limite para o valor da base. Alguns alunos admitiram a possibilidade da base de um triângulo ou lado do polígono, ter medida zero sem observar as implicações para a existência dessas figuras geométricas. Outros alunos construíram o conceito de limite e consideraram a base tender para zero sem necessariamente ser zero o valor da base.

O conhecimento C3 (Compreender que se $n \rightarrow \infty$, então a altura $h_{T_i} \rightarrow r = 1$) foi construído por processos de abstração pseudoempírica mediante variações de n repetidas vezes. Fazendo $n \rightarrow \infty$, por abstração refletida, foi possível construir o conceito de limite da altura de cada triângulo T_i . Assim como em C2 com a base, alguns alunos consideram que o valor da altura pode ser 1 sem considerar as implicações de seu significado geométrico. No entanto, outros alunos construíram o conceito de limite e consideraram a altura tender para zero sem necessariamente ter a medida zero. Os processos de abstração reflexionante ocorridos em C3 são iniciados a partir da variação de n , ocasionando a alteração do número de triângulos contido no polígono P_n . Os alunos utilizam com frequência os valores na tela do *applet*. A análise da variação dos valores na tela ajuda a fundamentar as respostas e os processos.

O conhecimento C4 (Compreender que se $n \rightarrow \infty$, $A_{T_i} \rightarrow 0$) foi sendo construído a princípio por abstrações pseudoempíricas com a variação de n , mas posteriormente por abstração refletida, esse conhecimento foi construído após observações dos valores na tela à medida que n foi alterado. Os conceitos de área e limite foram construídos quando os alunos afirmaram que a área tende para zero, mas devido ao seu significado, a área não pode ser zero, apenas tende para zero se n tende para o infinito. Houve alunos admitindo a possibilidade da base assumir o valor zero, ao afirmar que a base tende para zero, e essa afirmação ocorreu após verificar os valores na tela do *applet* à medida que n foi alterado.

O conhecimento C5 (Concluir que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$) foi construído por abstração refletida a partir do entendimento dos mecanismos que tornam $A_{T_i} \rightarrow 0$ sempre que $n \rightarrow \infty$ em C4. Quando ocorre o aumento do valor de n , ou seja, quando aumenta o número de triângulos, a área de cada um deles tende para zero. Nota-se que alguns alunos compreendem esse processo sem o auxílio de valores numéricos, outros só com o auxílio dos valores.

O conhecimento C6 (Concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$) foi construído por abstração refletida a partir dos conhecimentos construídos anteriormente, em especial é uma abstração refletida de C5. A área do círculo como a soma das áreas de cada triângulo é calculada como um limite. Esse limite pode ser escrito sob a forma de produto de n áreas do triângulo quando $n \rightarrow \infty$. Esses processos, que permitem a conceituação de limite da área, são construídos por abstração refletida dos conhecimentos C1, C2, C3, C4 e C5.

5. Conclusão

Os registros de respostas e as entrevistas revelaram um número considerável de informações relevantes do ponto de vista didático e do desenvolvimento intelectual desses alunos. Vale ressaltar que os alunos tiveram contato prévio com a atividade A2, antes de realizar os registros ou participar das entrevistas, ou seja, realizaram processos de assimilação e acomodação relativos à situação-problema posta a eles, que aconteceram antes, durante e após os procedimentos de coleta.

O procedimento adotado para as atividades A2, de coletar o registro de resposta e, em seguida, realizar entrevista exploratória, mostrou-se eficiente para identificar diferentes abordagens sobre um mesmo tema, além de ser um modo de estabelecer diferenças. Como essas atividades foram previamente analisadas pelos alunos, decorre dessa experiência vários processos de construção de conhecimento por abstração reflexionante. Nos registros escritos, houve um contato inicial com a atividade A2, sendo que os registros de respostas objetivavam coletar informações sobre os processos realizados na interação entre aluno e OA.

A atividade A2 favorece as construções do conceito de limite. A proposta de construir o conceito de limite com uma situação problema na geometria, é devida à possibilidade de perceber melhor esse conceito com casos de comprimento e área e seus significados geométricos. Esses casos aceitam a teoria de limite para explicar os casos que não admite os valores limite, como é o caso da base do triângulo isósceles tender para zero, a altura do triângulo isósceles tender para um, a área do triângulo isósceles tender para zero, e a área do polígono P_n tender para a área do círculo quando n tende para infinito, isso sem necessariamente que esses elementos cheguem ter esses valores no limite.

Especificamente o *applet* trouxe na situação-problema uma questão central que no limite da variação de n , teremos uma área, a de P_n , que tem outra, a do círculo, como limite. A situação-problema, contida na A2, permite iniciar processos de construção de conhecimentos sobre limite. Viabiliza a construção do conceito de limite da base, limite da altura, limite da área do triângulo T_i ; todos esses construídos com o limite da área de P_n , todos por abstração refletida, abstração refletida sobre abstração refletida, a meta-reflexão. A2 permite também, por abstração refletida, construir o processo de aproximação entre a área de um polígono P_n e a área do círculo como uma sequência de valores de P_n que converge para o valor da área do círculo com um n que tende para infinito.

Diversos foram os processos construtivos utilizados pelos alunos a partir da situação-problema. Os *applets* foram utilizados para a construção e a exemplificação de argumentos para dar resposta à situação problema proposta ao aluno, demonstrando sua eficiência como elemento metodológico que favorece a aprendizagem. Verificou-se também que a teoria da Abstração Reflexionante é um instrumento de grande valia para o exercício da docência, pois consegue explicar os diversos processos de construção de conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- ALBERTO, Abaporanga Paes Lemes; COSTA, Leonardo Silva; CARVALHO, Tânia Maria Machado de. Software e o ensino de Matemática: a utilização do software Geogebra no ensino da Matemática. In: OLIVEIRA, Cristiane Coppe de; MARIM, Vlademir (Org.). **Educação Matemática: Contextos e Práticas Docentes**. Campinas: Alínea, 2010. Cap. 10. p. 251-259.
- ALMOULOU, Saddy Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007. 218 p.
- BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999
- BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento**. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012. 200 p.
- BECKER, Fernando. **Epistemologia do professor de matemática**. Petrópolis: Vozes, 2012. 496 p. (b)
- BECKER, Fernando; MARQUES, Tânia Beatriz Iwaszko (Org.). **Ser professor é ser pesquisador**. 3. ed. Porto Alegre: Mediação, 2012. 136 p.
- BLUNTER, C. **New Directions of ICT-Use in education, learning without frontiers**, UNESCO, 1999.
- DOLLE, Jean-marie. **Princípios para uma pedagogia científica**. Porto Alegre: Penso, 2011. 199 p. Tradução: Sandra Loguércio.
- FAGUNDES, Léa da Cruz; SATO, Luciane Sayuri; MAÇADA, Débora Laurino. **Aprendizes do futuro: as inovações começaram**. Brasília: Mec/seed/proinfo, 1999. 95 p. (Coleção Informática para a mudança na Educação). Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003153.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2015.
- FIORENTINI, Dario. LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos**. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993. 169 p.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 214 p. (Contextos da Ciência).

PAIS, Luís Carlos. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa**. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PIAGET, Jean et al. **A Tomada de Consciência**. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1977. 211 p. Tradução: Edson Braga de Souza.

PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

PIAGET, Jean. **Fazer e compreender**. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1978. 186 p. Tradução: Christina Larroudé de Paula Leite. Revisão Técnica: Lysandre Maria Castelo Branco.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a educação?** 5. ed. Rio de Janeiro: José Olympio Editora, 1977. 96 p. Tradução: Ivete Braga. (b)

PIAGET, Jean. **Psicologia e Pedagogia: a resposta do grande psicólogo aos problemas do ensino**. Rio de Janeiro: Forense, 1970. 182 p.

PIVA JÚNIOR, Dilermando et al. **EAD na prática: planejamento, métodos e ambientes de educação online**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011. 194 p.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. DE. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: <http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book Metodologia do Trabalho Cientifico.pdf>. Acesso em 06 de mar de 2017.

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, Nilson José; CUNHA, Marisa O. (Org.). **Linguagem, conhecimento, ação: ensaios de epistemologia e didática**. São Paulo: Escrituras, 2003. Cap. 19. p. 313-336. (Coleção Ensaio Transversais).

SILVA, Antonio José da; BECKER, Fernando. Área Máxima: construindo o conceito de limites de funções com Geogebra. In: XXI CONGRESSO INTERNACIONAL DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 21., 2016, Santiago - Chile. **Anais...**. Santiago: Universidad de Chile, 2016. p. 266 - 271. Disponível em: <http://www.tise.cl/2016/img/Actas TISE 2016.pdf>. Acesso em: 07 dez. 2016. (b)

SILVA, Antonio José da; BECKER, Fernando. Cálculo NasNuvens: um ambiente de apoio à prática docente. In: XXIV CICLO DE PALESTRAS SOBRE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO, 24., 2016, Porto Alegre. **Anais...**. Porto Alegre: UFRGS, 2016. p. 137 - 146. Disponível em: <http://cinted.ufrgs.br/ciclos/ciclo24/Anais CINTED 2016.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2016

SILVA, Antonio José da; BECKER, Fernando. Das Experiências Docentes à Ação: elaboração de objetos virtuais para aprendizagem do conceito de limite de funções. **Revista Tecnologias na Educação**, Viçosa, v. 18, n. 1, p.1-15, fev. 2017. Semestral. Disponível em: <http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2017/02/Art5-vol18-edição-tematica-III-I-SNTDE-2016.pdf>. Acesso em: 06 fev. 2017.

TALL, David. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 19., 1995, Recife. **Proceedings**. Recife: Editora Universitária da Ufpe, 1995. v. 1, p. 61 - 75. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.203.5010&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 02 mar. 2015.

TALL, David. Students' Difficulties in Calculus. In: Plenary presentation in working group. in: International Congress Mathematical Education, 3., 1992, Quebec. **Proceedings**. Quebec: University Of Warwick - Mathematics Education Research Centre, 1992. p. 1 - 8. Disponível em: <<https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf>>. Acesso em: 02 mar. 2015.

VALENTE, José Armando. Espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, Maria Cristina Rodrigues Azevedo (Org.). **A tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002. Cap. 1. p. 15-37. (b)

VALENTE, José Armando. Repensando as situações de aprendizagem: o fazer e o compreender. In: BRASIL. Secretaria de Educação a Distância. Ministério da Educação e Cultura (Org.). **Tecnologia e educação: novos tempos, outros rumos**. Brasília: MEC/SEED, 2002. Cap. 4. p. 28-35. (Boletim Salto para o Futuro - setembro/2002). Programa TV Escola. Disponível em: <<http://cdnbi.tvescola.org.br/resources/VMSResources/contents/document/publicationsSeries/1426096028139.pdf>>. Acesso em: 04 abr. 2015. (a)

VINNER, Solomon; TALL, David. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, n. 2, p.151-169, jul. 1981. Semestral. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.3805&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 02 mar. 2015.